



I
ARTICULOS

AHORRO Y MODELOS MACROECONOMICOS

Por: Carlos Esteban Posada P.

El ahorro es bajo en Colombia. Tradicionalmente lo ha sido y hoy aún más. Según las cifras de cuentas nacionales, entre 1985 y 1991 el ahorro privado fue equivalente, en promedio, a 13,8% del PIB. El ahorro nacional, suma de los generados por los sectores privado y público, ascendió a 21% del PIB, también como promedio para esos 7 años. Entre 1992 y 1994 estas cifras se volvieron mucho más modestas. Así, se estima que en 1994 el ahorro privado pudo haber descendido a una sima, 6,2% del PIB, y que el nacional quizá debió «tocar un piso»: 15% del PIB¹.

Si tenemos en cuenta el bajo grado de desarrollo relativo de Colombia y comparamos esas cifras con las de los países desarrollados o en desarrollo que exhiben altos ritmos de crecimiento, como son los del extremo oriente, se hace evidente la baja «propensión» colombiana al ahorro. En conjunto, los siete países más desarrollados de la OCDE (EU, Japón, Alemania, Francia, Reino Unido, Italia y Canadá), registraron tasas de ahorro nacional cercanas a 20,7% del producto nacional en promedio (y Japón 31,1%) entre 1980 y 1987 en tanto que los del extremo oriente que están en rápido desarrollo como Corea del Sur, Malasia, Singapur y Tailandia han llegado a las cumbres de la austeridad: entre 30% y 35% del producto².

Sólo cuando se compara la tasa de ahorro colombiana con las de las principales economías latinoamericanas se deduce que la eventual insuficiencia de ahorro parece un rasgo típico de la región; al menos así lo fue en los años 80. En efecto, para el conjunto de las seis principales economías de América Latina (Brasil, México, Argentina, Venezuela, Chile y Colombia) la tasa de ahorro privado apenas ascendió a 12,6% y la de ahorro público a 3,3% del PIB entre 1980 y 1987, así que la tasa de ahorro total llegó a 15,9%, mientras que la de inversión ascendió a 18,9% en esos ocho años³.

Lo anterior es preocupante. Es bien sabido que una insuficiencia de ahorro es un factor importante de freno al avance económico de largo plazo o una fuente de problemas coyunturales, sobre todo en el caso de países en desarrollo que carecen de prestigio permanente en los mercados financieros internacionales⁴. Aún así, las cosas no invitan al desespero. Tanto la teoría como las cifras indican que la suerte colombiana en materia de ahorro puede modificarse e incluso que el funcionamiento a plena capacidad de otros motores del desarrollo económico conduce a elevar la proporción ahorrada del producto. Este documento se ocupa de estos asuntos desde un ángulo macroeconómico. En la sección I se repasan los «hechos estilizados» a la luz de la

teoría. La sección II es un resumen a manera de conclusión.

En los anexos se presentan dos modelos teóricos que sintetizan la teoría convencional sobre el ahorro. Mediante estos anexos se demuestra que el primer modelo, una versión clásica del modelo Mundell-Fleming de economía abierta, puede considerarse como la «forma resumida» del segundo modelo bajo ciertos supuestos y para el «período presente». El segundo modelo es el de optimización intertemporal de un agente representativo que se preocupa por el bienestar de su familia y descendientes.

I. TEORIA Y HECHOS

La teoría económica pertinente para iluminar la discusión sobre el ahorro, entre quienes se preocupan por su insuficiencia, es la teoría clásica. En este documento nos referiremos a sus dos versiones más conocidas y aplicadas a la discusión de política económica: la estática (modelo IS-BP) y la intertemporal. En los anexos I y II se presentan de manera formal estas dos versiones con ejemplos generales de aplicación y se muestra una conexión entre ellas.

1. IS-BP

El modelo IS-BP es la versión clásica del denominado Mundell-Fleming de economía abierta⁵. El modelo resume todos los equilibrios macroeconómicos en dos: el equilibrio interno (entre demanda y oferta agregadas o IS) y el externo (de balanza de pagos o BP); puesto que supone que los niveles de precios y salarios son perfectamente flexibles, considera lo

monetario como irrelevante. Aunque el modelo es de máxima simplificación y, por tanto, generador de resultados que pueden invitar a conclusiones precarias o ilusorias, tiene el mérito de servir como aparato sencillo de ordenamiento de hipótesis importantes y usuales en la controversia de política económica⁶.

Según este modelo, aquellos factores (exógenos) que promueven un incremento del producto desde el lado de la oferta conducen al elevamiento del ahorro. Entre estos factores se cuentan los incrementos de la oferta de fuerza laboral y de la productividad total de los factores⁷; y cuanto mayor sea la tasa de crecimiento del producto que resulte de tales motores mayor podrá ser la tasa de ahorro o proporción ahorrada del producto.

Para demostrar esta proposición basta con suponer la existencia de una función consumo estable que implique (como lo propuso Keynes) una propensión marginal a consumir inferior a la media⁸. Y esto es compatible con suponer que el consumo depende no sólo del ingreso (producto) sino también de otras variables, entre ellas la tasa de interés real, de manera inversa por supuesto⁹.

Si el incremento de la productividad total de los factores no es más intenso que el del resto del mundo o si la expansión del producto se debe sólo al incremento de la oferta laboral, el modelo predice que los aumentos del producto y del ahorro vendrán acompañados, en general, de una devaluación real a fin de mantener el equilibrio de la balanza de pagos, ya que el aumento del producto induce otro de las importaciones (véase el Anexo 1); sería

necesaria, en consecuencia, la devaluación real para compensar el efecto del mayor nivel de producción (más importaciones) si se supone, como lo hace el modelo, que las exportaciones netas (exportaciones menos importaciones) dependen positivamente, *ceteris paribus*, de la tasa de cambio real.

Bajo perfecta movilidad de capitales la tasa de interés real de equilibrio se mantendrá en un nivel igual al de la externa y, para el caso de una pequeña economía abierta, aquella será determinada por ésta. Pero si la movilidad no es perfecta, la tasa real interna podrá sufrir alguna modificación como resultado del proceso de expansión del producto y del ahorro; subirá o bajará dependiendo de la magnitud de los parámetros que incidan sobre la cuenta corriente externa (Anexo 1).

Así, el modelo predice que ante aceleraciones de la tasa de crecimiento económico podrá aumentar la tasa de ahorro, y que las tasas de cambio real e interés real permanecerán constantes, bajarán o subirán durante este proceso.

El modelo permite incluir el examen de los efectos de dos tipos de políticas económicas reales: variaciones del grado de restricción del crédito de consumo (puesto que este documento se concentra en el examen del ahorro) y del grado de estímulo o restricción fiscal sobre la demanda agregada, por las vías tradicionales de tarifas impositivas y alteración del gasto público.

De acuerdo con el modelo la política de mayor restricción del crédito de consumo tien-

de a elevar la tasa de ahorro y la tasa de cambio real y reducir la tasa de interés real si hay movilidad imperfecta de capitales. Así, la predicción del modelo es la siguiente: cuanto más se restrinja el crédito de consumo mayor será la tasa de ahorro y la tasa de cambio real y, si hay movilidad imperfecta de capitales, menor será la tasa de interés real.

La política de austeridad fiscal genera resultados similares a los de la de restricción del crédito de consumo. Pero el mecanismo, por supuesto, es distinto: básicamente se logra, en este caso, impulsar la tasa de ahorro nacional mediante el incremento de la relación entre el ahorro público y el producto global de la economía. Y si la devaluación generada durante el proceso eleva significativamente la cuenta comercial externa, mayor podría ser el aumento del ahorro público si los ingresos públicos dependen de manera especialmente intensa de las actividades de exportación o de sustitución de importaciones.

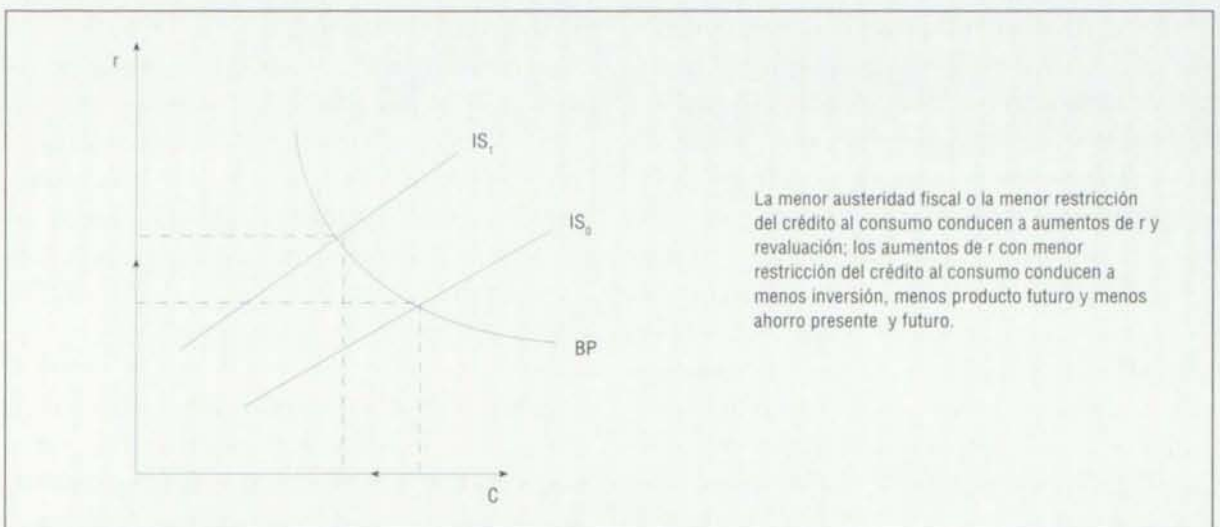
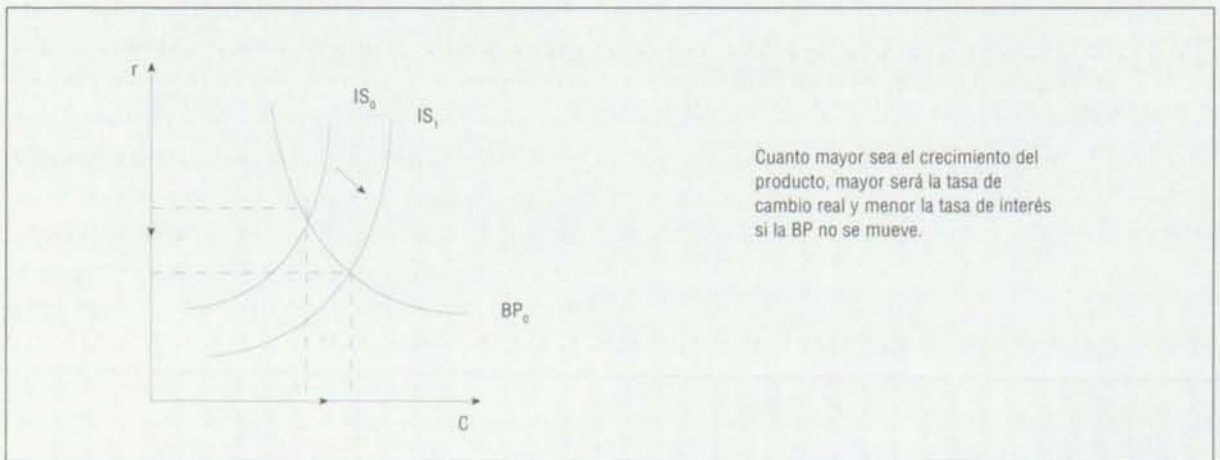
La caída de la tasa de interés real externa (o del margen entre la interna y la externa gracias a una mayor movilidad de capitales) tiende a generar una reducción de la tasa real interna y una menor tasa de cambio real. Si el producto permanece constante el modelo predice una reducción de la tasa de ahorro, además de esos dos efectos sobre las tasas reales de interés interna y de cambio.

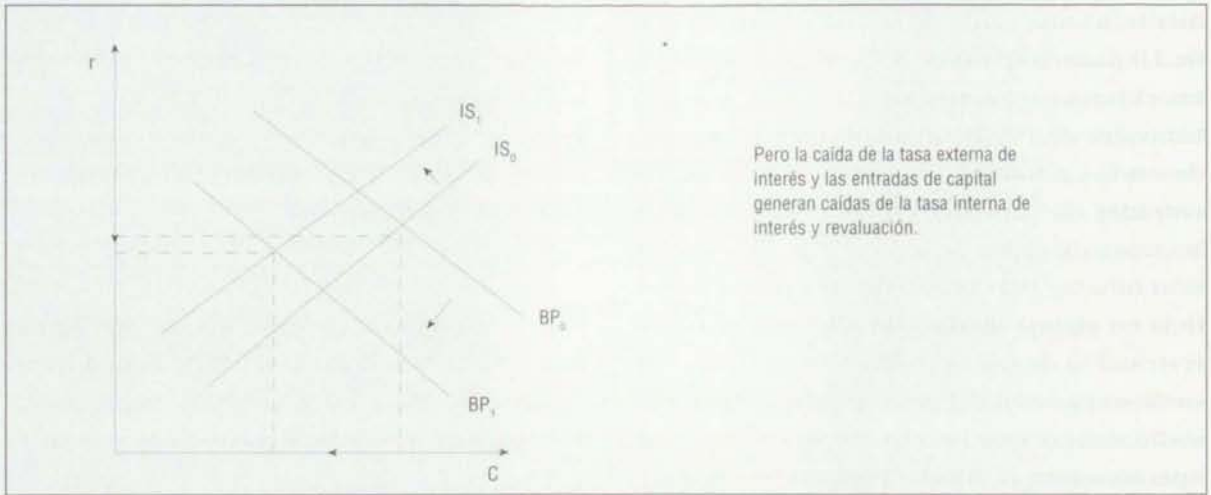
Los anteriores ejemplos de variación de la tasa de ahorro no son aleatorios. De un lado, parecen pertinentes para el examen de la caída reciente de la tasa de ahorro en Colombia: aunque el producto colombiano se aceleró entre 1992 y 1994 se produjo casi simultánea-

mente: a) una caída de la tasa de interés real de 10 puntos (pasó de 15% real anual a 0 entre el tercer trimestre de 1991 y el segundo trimestre de 1992), originada en buena medida en los notables aumentos previos de las entradas de capital y en las reducciones de las tasas externas de interés¹⁰, b) una expansión notable del crédito de consumo (que refleja en alguna medida un aflojamiento de la restricción de tales créditos¹¹) y c) una política de expansión del gasto público¹². Este episodio sugiere que los efectos sustitución que operan sobre el ahorro privado (sustitución

de ahorro por consumo por cuenta de la menor tasa de interés y de la menor restricción del crédito) pueden ser relativamente fuertes frente al efecto ingreso cuando los cambios en las variables que inducen el efecto sustitución son significativos.

A lo largo de este proceso la tasa de cambio real cayó (revaluación real). El diagrama 1 ilustra los efectos de estos cambios exógenos en términos de desplazamientos de las curvas IS y BP.





De otro lado, parece existir un consenso entre los estudiosos del tema del ahorro en el plano internacional acerca de la importancia que tienen los factores crecimiento económico, restricción del crédito al consumo y austeridad fiscal en la generación del ahorro privado y público.

Haque et al. (1990) estimaron una versión econométrica del modelo IS-BP (es decir, del tipo Mundell-Fleming con rasgos clásicos: precios y salarios flexibles y expectativas racionales de inflación y devaluación) con datos de 31 países en desarrollo del período 1963-1987¹³. En su modelo la inversión depende (negativamente) de la tasa de interés real y (positivamente) del aumento del producto¹⁴. La función consumo tiene algunos elementos keynesianos (derivables de las hipótesis de restricción de liquidez y horizontes finitos de los consumidores), así que la «propensión media al ahorro» del sector privado crece con el ingreso disponible. De acuerdo con este modelo si la tasa de crecimiento del ingreso disponible es 5% anual la relación consumo/ingreso disponible cae en 4,5%, es decir, se genera un aumento de la tasa de ahorro del sector privado.

Deaton (1992) expuso un modelo teórico del consumo privado y lo aplicó a Costa de Marfil y, en menor medida, a Thailandia y Ghana. El modelo excluye la posibilidad de endeudamiento neto (el patrimonio tiene que ser no negativo); bajo los supuestos de aversión al riesgo, impaciencia (tasa de descuento mayor que la tasa de interés), comportamiento estocástico del ingreso y restricción de crédito se deduce que el consumo de corto plazo es más suave que el ingreso (cuando sube el ingreso se constituye un ahorro precautelativo a fin de atender al consumo en épocas malas); así, Deaton produjo una racionalización, para el corto plazo, de la función consumo keynesiana (lineal y con una constante : $c = k + by$). Con una función de esta clase es inmediata la deducción del efecto positivo que tiene el crecimiento económico sobre la tasa de ahorro. Por tanto, ofreció un argumento en favor de que cuando se acelera el crecimiento del ingreso crece la tasa de ahorro¹⁵.

Trabajando en esta misma línea de investigación pero con datos de familias de EU¹⁶, Carroll (1994) encontró que el consumo de los hogares depende básicamente del ingreso

corriente (y no del ingreso futuro o de su equivalente en términos de riqueza y capital humano), aún sin restricciones de liquidez, y que la incertidumbre del ingreso futuro es un factor que puede explicar un ahorro precautelativo, una abstención de endeudarse contra ingresos futuros y, por tanto, un comportamiento de corto plazo del consumo similar al descrito por la función consumo keynesiana lineal con una constante.

Edwards (1995) reportó respaldo econométrico (en una muestra de 50 países para el período 1983-1992) a la hipótesis de que el ahorro privado depende positivamente del crecimiento. Esta variable fue la más importante entre las que seleccionó y puso a prueba como determinantes de la tasa de ahorro privado. En el caso del ahorro público, resultaron significativos y con influencia positiva el crecimiento económico y el superávit en la cuenta corriente externa.

Jappelli y Pagano (1994) hallaron evidencia favorable a la hipótesis de que cuanto menor es el grado de restricción del crédito a los consumidores menor es la tasa de ahorro. Según sus hallazgos, la caída de la tasa media (no ponderada) de ahorro nacional en los países de la OCDE sucedida entre los años setenta y ochenta se explica en un alto porcentaje (50% o más) por la disminución de las restricciones de crédito de consumo propiciadas por los procesos de desregulación financiera. Adicionalmente, consideraron que las restricciones de crédito a los consumidores contribuyen a explicar el hecho de que el crecimiento económico tenga un impacto favorable sobre la tasa de ahorro. En efecto, bajo tales restricciones la mayor tasa de crecimiento económico no permite que los jóvenes ele-

ven su consumo por encima de su ingreso corriente en correspondencia con la estrategia de anticipar sus mayores ingresos futuros; en cambio, sí permite que las personas de mediana edad acrecienten su patrimonio.

En lo referente a la política fiscal, Corbo y Schmidt-Hebbel (1991) aportaron evidencia favorable surgida de datos de países en desarrollo a la hipótesis tradicional (incorporada en el modelo IS-BP) según la cual los cambios en la tasa de ahorro público (tanto por el lado de los impuestos como por el del gasto) repercuten en la tasa de ahorro nacional sin ser, por tanto, neutralizados por alteraciones en dirección contraria en la tasa de ahorro privado, como lo implica la llamada hipótesis de equivalencia ricardiana¹⁷. Más aún, Corbo y Rojas (Corbo, 1995) mostraron que el gasto público tuvo un efecto deprimente sobre la tasa de inversión nacional (inversión total/PIB) en una muestra de países latinoamericanos durante 1980-1988. Este es el viejo efecto *crowding out*, propio del modelo IS-BP.

2. Optimización intertemporal

Para muchos propósitos el modelo IS-BP puede resultar inadecuado. En especial, su naturaleza estática no propicia la distinción entre los comportamientos permanentes y los transitorios de las diferentes variables. Esta distinción, claro está, puede hacerse en este modelo pero de una manera demasiado simplista y *ad hoc*: si un cierto comportamiento de una variable exógena es permanente, serán permanentes sus efectos sobre las variables endógenas; y si es transitorio, así lo serán sus efectos. Pero tal método obliga a adivinar *ex ante*, sin recurrir al modelo, justo lo que éste debería predecir bajo determinadas condiciones.

La manera adecuada de superar estas deficiencias, cuando resultan demasiado costosas, consiste en establecer restricciones presupuestales intertemporales y suponer que los agentes económicos se preocupan no sólo de objetivos presentes sino también de los futuros.

El modelo estándar clásico para describir la determinación de la tasa de ahorro privado bajo tales consideraciones es el del «agente representativo» que maximiza el valor presente de la serie de utilidades periódicas (o instantáneas), presente y futuras, reportadas por el consumo a su familia (y a él) y a sus descendientes, sujeto a una restricción presupuestal intertemporal¹⁸. Una versión simplificada del modelo para una economía abierta con movilidad perfecta de capitales se encuentra en el anexo II, y una versión completa, con producción dependiente de trabajo y capital, acumulación de capital y movilidad tanto perfecta como imperfecta de capital se encuentra en Razin (1984). En esta sección haremos un uso informal de este modelo para continuar avanzando por el campo de los hechos y de los hallazgos de los economistas sobre el ahorro y la macroeconomía. Con todo, conviene reiterar que este modelo puede considerarse, bajo ciertos supuestos, como una manera de sustentar teóricamente las hipótesis sobre ahorro y consumo privados que contiene el modelo IS-BP.

Como el modelo IS-BP, el de optimización intertemporal utilizado aquí supone exógeno el nivel del ingreso y su crecimiento a fin de simplificar las cosas¹⁹. Además supone que: 1) Hay una preferencia por el consumo presente frente al futuro (una tasa de descuento positiva), 2) La herencia no puede ser negati-

va (no puede dejarse a los descendientes una deuda mayor que el activo), 3) Puede existir algún endeudamiento que permita un eventual consumo superior al ingreso del período corriente si el agente lo juzga conveniente y, 4) (A fin de justificar la existencia de una tasa de cambio real), se consumen dos tipos de bienes: transable (internacionalmente) y no transable. El precio relativo del bien transable es la tasa de cambio real. *

El primero de esos supuestos es esencial. Permite entender la existencia del ahorro aún en situaciones de certidumbre plena y mercado de capitales perfecto. Y esta es una de sus ventajas frente al modelo IS-BP. En efecto, la teoría parte de la consideración de que el agente tiene una preferencia por el presente; así, el sacrificio de consumo presente sólo puede entenderse (salvo que se utilice una hipótesis de altruismo) como un acto cuya racionalidad se confirma mediante una recompensa futura. Esto tiene dos implicaciones prácticas.

De un lado, nos dice que las sociedades que ahorran demasiado poco con relación a su ingreso probablemente «gozan» o soportan reglas de juego que entrañan **expectativas** de recompensas al sacrificio de consumo presente inferiores a las propias de sociedades que ahorran mucho. La forma usual de expresar esto es afirmando que la existencia de un ahorro positivo bajo certidumbre implica que la tasa de interés real *ex ante* es superior a la tasa subjetiva de descuento (véase la ecuación 7 del Anexo II bajo la condición de expectativas de tasa de cambio real estable). Pero habría que insistir en que la tasa de interés relevante: a) es una expectativa, b) es neta de impuestos, c) es neta de «castigos» sociales

informales al ahorro individual cuya importancia puede ser diferente en cada sociedad y relacionada con sus patrones culturales y de vida familiar. Un ejemplo típico podría ser el del bajo ahorro individual que resulta de la decisión del sujeto entre consumir **él** más hoy ó consumir más, **también hoy**, su parentela, por cuenta suya.

De otro lado, sugiere que las formas del ahorro pueden ser innumerables. Si de lo que se trata es del sacrificio de consumo presente de un individuo, para él el ahorro presente puede tomar la forma, por ejemplo, de la adquisición mediante un contrato de arrendamiento financiero de un bien durable clasificado en las estadísticas oficiales como un bien de consumo pero cuya generación de servicios que hoy le reportan placer es inferior al sacrificio que le implica el costo financiero; y lo hace porque espera que en el futuro la mayor satisfacción descontada compense con creces el costo del sacrificio actual. Otro ejemplo usual puede ser el pago anticipado de una renta para contar con el derecho a parte de una cosecha futura. Y, como estos, podrían ponerse muchos ejemplos de sacrificio (egoísta, obviamente) de consumo presente que ni siquiera dan lugar a ampliaciones de patrimonio, tal como éste se mide usualmente.

Esas implicaciones muestran lo fácil que puede ser encontrar estadísticas de tasas de ahorro tan diferentes entre diversas sociedades, y lo difícil que puede ser encontrar las verdaderas causas de mayores o menores tasas de ahorro entre distintas sociedades recurriendo a cifras agregadas de ahorro.

Dos supuestos adicionales son importantes para generar una relación de complementa-

riedad entre el modelo IS-BP y el de optimización intertemporal: 1) Que en éste último la restricción de crédito sea lo bastante fuerte como para que el consumo no se aleje demasiado del ingreso corriente²⁰; 2) Que la satisfacción al legar una herencia se descuenta a una tasa tan alta que sólo pueda generarse parcialmente el resultado previsto por la hipótesis de equivalencia ricardiana; en tal caso la forma de financiar el gasto público (con mayor deuda pública, cuyo servicio soportarán las generaciones futuras a través de más impuestos o, alternativamente, con más impuestos presentes) no será irrelevante desde el punto de vista del gasto agregado real presente (público y privado) y podrá afirmarse, en consecuencia, que la política de financiación pública es una variable exógena importante del modelo macroeconómico y que incide sobre la tasa de ahorro nacional.

No obstante, el modelo de optimización intertemporal con dos bienes no resulta siempre equivalente al IS-BP²¹. Y tiene sus ventajas comparativas frente a éste para explicar el ahorro aún si se excluye, como lo hemos hecho, la vigencia de la hipótesis de equivalencia ricardiana. En primer lugar, ha permitido nuevas formas de estimar la elasticidad-interés del ahorro y, en general, los resultados son favorables a la hipótesis de que es significativa. Con base en un modelo similar (pero en el cual el supuesto de la motivación por dejar herencia es sustituido por un horizonte infinito de planeación del consumo), Ostry y Reinhart (1992) estimaron una elasticidad de sustitución intertemporal (entre consumo presente y consumo futuro) entre 0,3 y 0,8, una elasticidad de sustitución intratemporal (entre consumo de bienes transables y no transables) entre 1,2 y 1,3 y un factor de descuento entre 0,94 y 0,995 para una muestra

de 13 países en desarrollo de África, Asia y América Latina. En el caso de Asia, encontraron una elasticidad de sustitución intertemporal de 0,8, el doble de la de países latinoamericanos y africanos²². Con este modelo otorgaron apoyo empírico al teorema de Obstfeld (1982) según el cual la variación transitoria de los términos de intercambio genera alteraciones de la tasa de ahorro, en tanto que la modificación permanente de estos sólo conduce a un cambio similar del consumo, dejando intacta la tasa de ahorro.

En un trabajo más reciente que replica parcialmente el anterior, Ogaki, Ostry y Reinhart (1994) lograron resultados que refuerzan los anteriores. Y ello a pesar de que el trabajo presenta dos diferencias con aquel: a) se distingue explícitamente entre países de bajo, mediano y alto ingreso; b) se adiciona el modelo con una relación lineal entre producto y capital que implica un rendimiento del capital constante (según la «teoría del crecimiento endógeno»); c) se supone dado el precio relativo del bien no transable cuando se extiende el modelo previo al caso del crecimiento económico y, obviamente, se considera que el ahorro se transforma en mayor capital. Con el modelo extendido (es decir, con acumulación de capital y crecimiento económico asociado a ésta) se calculó la sensibilidad (semi-elasticidad) de la tasa de ahorro a la tasa de interés; los autores encontraron que en países de bajo ingreso dicha sensibilidad es positiva pero casi nula: 0,1 (un aumento de la tasa de interés en 1% sólo eleva la tasa de ahorro privado en 0,1%; a su juicio, quizás porque un consumo similar al de subsistencia impide sustituciones intertemporales) y, en cambio, 0,5 (es decir, eleva la tasa de ahorro privado en 0,5%, 5 veces mayor) en países como Colombia o de ingreso más alto²³.

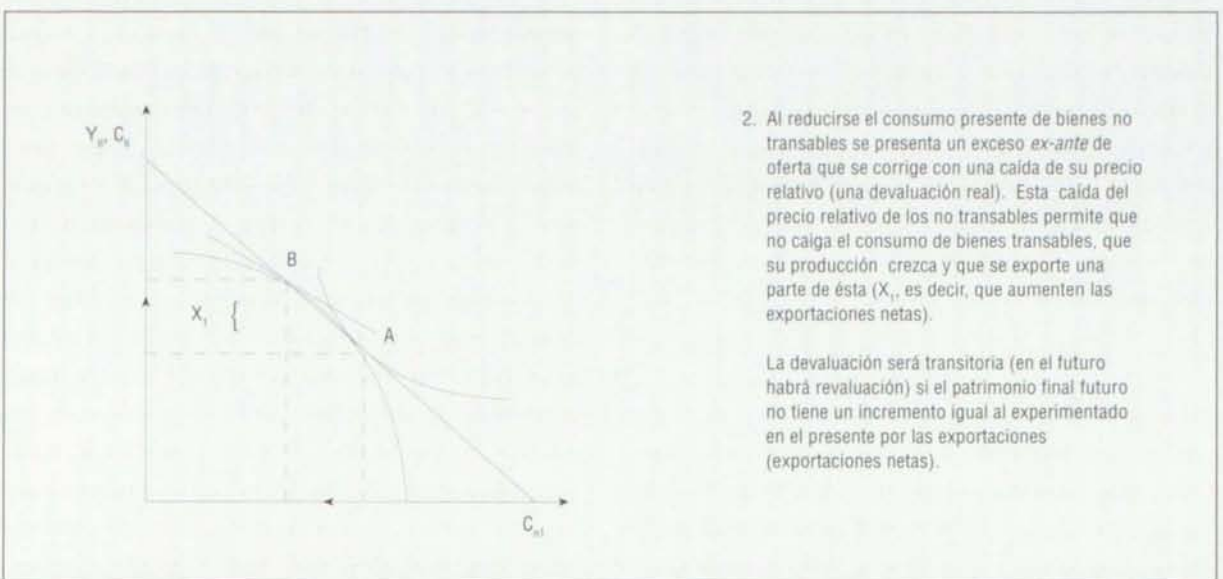
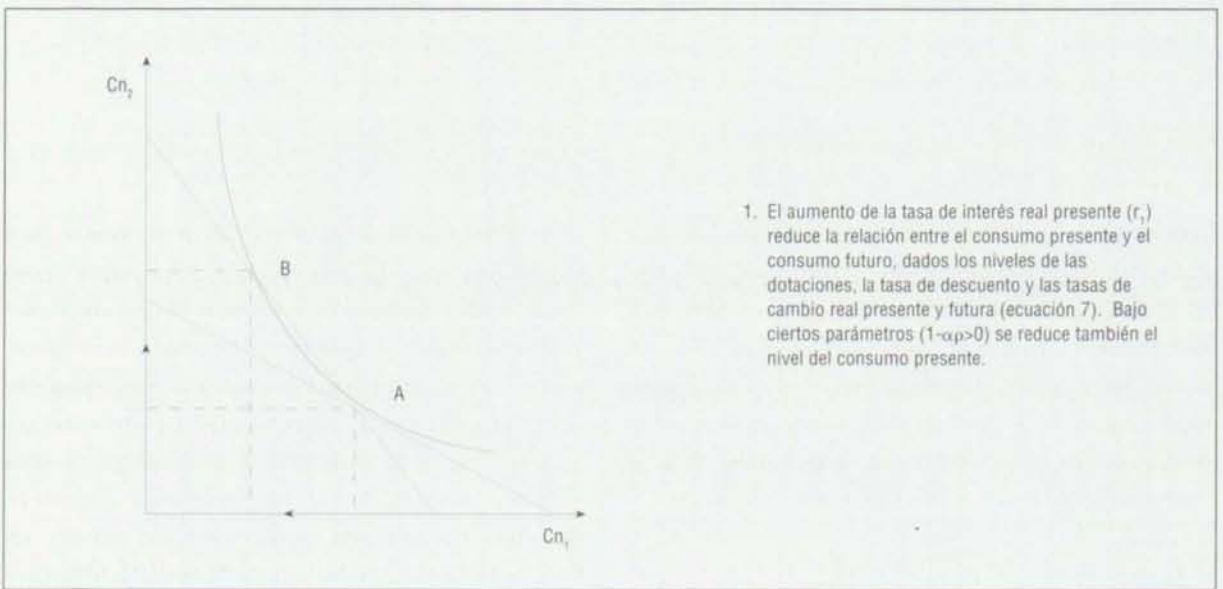
En términos del modelo que se presenta en el Anexo II, puede demostrarse que si el precio relativo del bien transable (la tasa de cambio real) es constante y, por tanto, también la estructura de consumo entre ambos tipos de bienes, bastará que la elasticidad de sustitución intertemporal sea positiva (que en el modelo es igual a $1/\sigma$) para que la caída de la tasa de interés real (causada, por ejemplo, por la disminución de la tasa de interés externa, tal como sucedió a finales de los años 80 y principios de los 90 para América Latina²⁴) eleve el consumo del bien no transable y, en consecuencia, el consumo agregado²⁵. Y cuanto mayor sea la elasticidad de sustitución intertemporal mayor será la reacción del consumo al cambio de la tasa de interés real. Dado el ingreso disponible, el aumento del consumo agregado se traducirá en una caída de la tasa de ahorro.

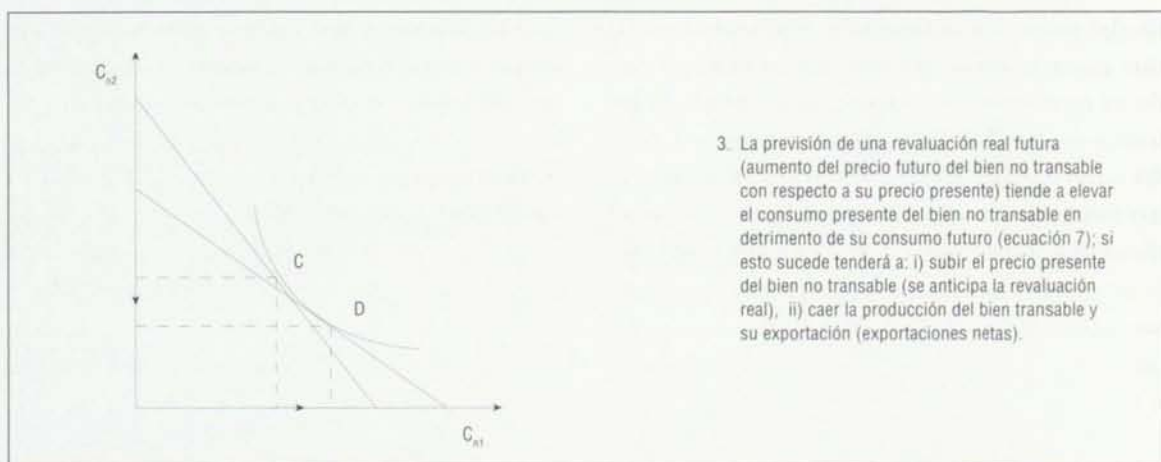
No obstante, en un modelo de equilibrio general (como el del Anexo II) no siempre puede suponerse la constancia de la tasa de cambio real. En particular, la caída de la tasa de interés real²⁶, como se dijo, conduce al aumento del consumo del bien no transable y, en general, a un exceso *ex ante* de demanda de éste y al incremento de su precio relativo (a una revaluación real). Esta reacción puede acelerar el consumo del bien transable o reducir su oferta y, en todo caso, crear un exceso *ex ante* de la demanda por los transables; la caída de las exportaciones netas (el saldo de la cuenta comercial de la balanza de pagos) será una manifestación de este proceso.

En la medida en que haya alguna movilidad internacional del capital debe considerarse esta revaluación real como transitoria. En efecto, los créditos externos que financian la caí-

da del saldo en la cuenta comercial tendrán que pagarse en el futuro (con creces) y, llegado el momento, la tensión en el mercado interno de capitales revertirá el proceso, dando lugar a un proceso contrario y simétrico al previamente mencionado (ilustrado en el diagrama 2, secciones 1 y 2). La previsión de

una revaluación real futura generará una anticipación de los planes de gasto, más consumo presente en detrimento del consumo futuro, y, con ello, una «suavización» de los movimientos descritos por el modelo (diagrama 2, sección 3).





Sólo bajo un supuesto de financiación de los movimientos de la cuenta comercial con variaciones equivalentes del valor presente del patrimonio futuro (cuyo ejemplo típico es la financiación con flujos permanentes de inversión extranjera directa) se puede considerar que los movimientos mencionados de la tasa de cambio real son permanentes (Anexo II)²⁷.

Así, las fluctuaciones de los términos de intercambio, las variaciones de la tasa de interés real o las previsiones de movimientos futuros de las tasas de cambio real pueden explicar cambios de las tasas de ahorro. Pero el análisis anterior parece destinado a explicar movimientos transitorios o sólo una parte de las diferencias «normales» o persistentes entre las tasas de ahorro de diferentes países, por ejemplo, entre las latinoamericanas y las del este asiático.

Hay un factor relativamente perdurable (aunque no completamente) que diferencia las economías, que tiene importancia en la determinación de la tasa de ahorro nacional y cuyo análisis resulta cómodo en el marco de un modelo intertemporal: la estructura demográfica.

Para entender lo anterior supongamos, por un momento, que el motivo herencia (esto es, el valor presente o descontado de la satisfacción percibida por el agente representativo al dejar una herencia a sus descendientes) sea poco significativo. Bajo este supuesto nuestro modelo se convierte en una versión ampliada de la hipótesis del ciclo de vida, cuyo líder, como es bien sabido es Modigliani. En su discurso Nobel Modigliani (1986) insistió en una implicación empírica específica de su hipótesis: el crecimiento de la productividad tiende a generar una mayor tasa de ahorro, en la medida en que modifica la estructura intergeneracional de ingresos en favor de quienes trabajan (y ahorran) *versus* los retirados; agregó, además, que las restricciones de liquidez refuerzan el efecto positivo que tiene el aumento de la productividad sobre la tasa de ahorro. En cuanto al motivo herencia, insistió en que, *per se*, sería pequeño o nulo tal como lo implica su teoría pero que la incertidumbre sobre la longitud de la vida o sobre los gastos médicos en la vejez puede explicar buena parte de las herencias (herencias involuntarias) como resultantes de ahorro precautelativo, suponiendo agentes adversos al riesgo²⁸.

Un desarrollo empírico de lo anterior se le debe a Hubbard, Skinner y Zeldes (1994). Con un modelo de ciclo de vida pero con incertidumbre en gastos médicos e ingresos y con *transferencias públicas cuyo monto asciende alternativamente a 0 o a un mínimo de subsistencia*, los autores encontraron que los hogares de EU que se inician con bajos niveles de ingreso permanente (es decir, bajo nivel de educación y riqueza) tienden a subahorrar (con respecto a lo que prediría el modelo estándar de ciclo de vida sin transferencias), en tanto que los hogares con alto nivel de ingreso permanente (alto nivel de educación y riqueza) ahorran magnitudes más o menos similares a las predichas por el modelo estándar. La conclusión de ellos fue directa: para aumentar el ahorro privado debería hacerse más restrictivo el acceso a las transferencias públicas.

En términos más concretos, esa conclusión equivale a la siguiente: el sistema de seguridad público de caja (respaldado por el Estado) de invalidez y vejez, si es creíble, es el mejor para elevar la tasa de descuento del consumo futuro y entonces, para reducir la tasa de ahorro de los trabajadores jóvenes y de edad intermedia; sin embargo, un incremento de las cotizaciones obligatorias para financiar ese sistema puede implicar un incremento transitorio del ahorro público y, por tanto del nacional (bajo el supuesto ya defendido de no equivalencia ricardiana).

Como ya se mencionó, una implicación de la hipótesis del ciclo de vida es que la tasa de ahorro privado depende positivamente de la tasa de crecimiento económico: a mayor crecimiento mayor la brecha entre el ingreso vitalicio de los actuales trabajadores y el de los

retirados y, por tanto, mayor la tasa de ahorro agregado puesto que ésta se acerca más a la de los trabajadores que a la de los retirados. Aghevli et al. (1990) reportan los resultados de una regresión explicativa de la propensión media a ahorrar (ahorro nacional/ingreso nacional) con una muestra de 112 países con cifras medias de 1975-1988. Se encontró que la propensión a ahorrar depende positivamente (en su orden) de: 1) La carga de la deuda externa (capturada mediante una *dummy*)²⁹, 2) La proporción de las personas en edad laboral (15 a 64 años) en la población total, 3) La tasa de crecimiento del producto *per capita* y 4) el ingreso *per capita*; y negativamente de: 1) Los términos de intercambio y 2) La inflación; pero no resultaron estadísticamente significativos los coeficientes del ingreso *per capita* ni de la tasa de inflación.

Edwards (1995) se basó también en la hipótesis del ciclo de vida. En el caso de las economías latinoamericanas encontró respaldo estadístico (en un trabajo ya mencionado) a la conjetura de que el ahorro privado depende inversamente de la dependencia demográfica y directamente del crecimiento y de los sistemas privados de pensiones. En este último aspecto retomó la conclusión de Feldstein: «...Si los individuos perciben que obtendrán altos beneficios de la seguridad social al momento de su retiro, tenderán a reducir la cantidad ahorrada durante sus días activos (ibíd. p. 141). Finalmente, de acuerdo con Faruque y Husain (1995) la transición demográfica explica, en el sentido econométrico, las altas tasas de ahorro y éstas, a su vez, las altas tasas de crecimiento económico en Indonesia, Malasia, Singapur y Tailandia. El crecimiento del ingreso disponible *per capita* sólo podría explicar, según esta investigación, el nivel del ahorro.

3. Agentes heterogéneos

Quizá la gran limitación del modelo del agente representativo es su incapacidad para explicar aquellas consecuencias que tiene la heterogeneidad social sobre la tasa de ahorro nacional. Esto, claro está, no significa que los modelos anteriores sean inútiles; son bastante útiles para guiar la investigación empírica sobre el comportamiento temporal de la serie del ahorro en una misma economía en la cual la estructura del ingreso o del patrimonio no haya cambiado sustancialmente a través del tiempo o para comparar los comportamientos del ahorro en sociedades con similar distribución³⁰.

Para aclarar este asunto comparemos dos sociedades, cada una con n agentes. En la primera, la distribución de la riqueza inicial es uniforme. Cada agente tiene A_0 como riqueza inicial; el modelo del agente representativo resulta impecable. El patrimonio inicial del agente representativo es idéntico al de cualquier otro.

En la segunda, la distribución de la riqueza inicial sigue un patrón concentrado (por ejemplo, las frecuencias de riqueza siguen una distribución χ^2 , es decir, más concentradas hacia un grupo social de lo que describiría una distribución normal). Si quienes están sujetos a restricciones de crédito («restricciones de liquidez») tienen niveles de riqueza inicial negativos, nulos o positivos pero bajos), en tanto que quienes no están sujetos a estas restricciones tienen niveles de riqueza relativamente altos entonces la caída de la tasa de interés tendrá muy probablemente un efecto menor sobre el consumo presente que en el caso de la sociedad

igualitaria. En otras palabras, la elasticidad-interés del ahorro dependerá del grado de concentración de la riqueza inicial y de los cambios en éste³¹.

Es de esperar, por tanto, que la elasticidad-interés del ahorro sea mayor en el este asiático que en los países latinoamericanos típicos, entre ellos Colombia. Al respecto, resulta bastante sugestivo el hallazgo ya mencionado de Ostry y Reinhart (1992) acerca de la mayor sensibilidad del ahorro a la tasa de interés en los países del este asiático que en los latinoamericanos. Como se sabe, aquellos tienen menor desigualdad de ingresos y riqueza que estos.

Otro aspecto interesante del esquema de agentes heterogéneos es el referido a sociedades con estructuras demográficas distintas; este parece ser un elemento importante para explicar diferentes tasas de ahorro. El resultado del trabajo ya referido de Faruque y Husain (1995) es radical al respecto.

II. CONCLUSIONES

Colombia, como otros países latinoamericanos representativos, tiene tasas de ahorro significativamente menores que las de países en desarrollo de rápido crecimiento económico, entre los cuales sobresalen los del este asiático. Este hecho es preocupante porque significa que su ritmo de avance económico puede quedar restringido por una insuficiencia de ahorro y porque, en tal caso, pueden ser más complicados los problemas de la política de estabilización o demasiado estrecho su margen de maniobra.

Las causas de un bajo grado de ahorro no son fáciles de detectar desde un punto de vista macroeconómico. Sin duda es necesario el examen de cifras microeconómicas y de los asuntos relacionados con la estructura social y el conjunto de instituciones (reglas de juego) que enmarcan la actividad económica. Pruebas indirectas de esto son la similitud entre las tasas de ahorro latinoamericanas (a pesar de las apreciables diferencias en sus desempeños macroeconómicos en los años 80), la gran diferencia entre estas tasas y las de los países del extremo oriente y la similitud entre las tasas de ahorro de estos últimos.

Con todo, el trabajo estadístico reciente ha identificado empíricamente algunas causas globales de mayores o menores proporciones del ahorro en el producto social. Varios de estos hallazgos corroboran ciertas hipótesis defendidas desde hace mucho tiempo por los economistas.

Entre las principales causas de las bajas tasas de ahorro se han detectado las siguientes: a) menor ritmo de crecimiento del producto *per cápita*; b) menor disciplina fiscal (lo que implica menor ahorro nacional aunque pueda significar, *ceteris paribus*, tasas de ahorro privado ligeramente superiores); c) estructura demográfica relativamente sesgada hacia la población dependiente o hacia agentes económicos en los grupos de mínimas tasas de ahorro; d) mayor concentración del ingreso entre quienes tienen tasas de ahorro bajas (por ejemplo, perceptores de rentas relativamente estables o sujetos relativamente neutrales o amantes del riesgo); e) un rendimiento real

neto (después de impuestos) del ahorro demasiado bajo; f) menor restricción del crédito al consumo; g) menor nivel educativo; h) mayor confianza en que la familia o el Estado asuman los gastos de la vejez y, de manera correlativa, poca confianza en los resultados (netos de impuestos o de exacciones informales) de ahorrar en fondos privados de pensiones; i) menor sensibilidad del ahorro a tasas reales de interés altas (por causa de la mayor concentración de la riqueza); j) mayor importancia de las formas de ahorro que pueden subestimarse en las estadísticas oficiales (ahorros informales, ahorros en moneda extranjera), y k) subestimación del ingreso privado disponible.

Además, pudieron existir en la coyuntura 1991-1993 de la economía colombiana elementos transitorios del bajo ahorro: de un lado, agentes que observaron una devaluación nominal demasiado baja con respecto a la inflación y, gracias a la movilidad de capitales, una tasa de interés nominal relativamente pequeña pudieron aumentar su consumo en detrimento del ahorro; de otro lado, también los agentes que previeron una revaluación real futura pudieron aumentar su consumo presente en detrimento del ahorro. La apertura de la cuenta de capitales en un ambiente en el cual la inflación prevista caía demasiado poco pudo conducir a unas caídas transitorias de las tasas de interés real y de ahorro. Posteriormente, ya en el período 1993-1994, una ola de optimismo asociada a una valorización coyuntural de activos, al auge económico o a las perspectivas de una mejora permanente de su ingreso futuro pudo contribuir a nuevas reducciones de la tasa de ahorro³².

NOTAS

- 1 Cuadro 2, Notas Editoriales, Revista del Banco de la República, octubre, 1994.
 - 2 Por diferentes períodos y problemas de medición las cifras no son estrictamente comparables pero sí esbozan un cuadro correcto. Las cifras de los siete países más desarrollados se encuentran en Aghevli et al. (1990, parte dos, cuadro 1) y las de los países del extremo oriente en los gráficos 2.22, 2.23, 2.24 y 2.25 de Edwards (1995).
 - 3 Aghevli et al. (op. cit., parte tres, cuadro 3).
 - 4 De acuerdo con Corbo (1995), la tasa de inversión (inversión/PIB) es el principal factor determinante (en el sentido estadístico) del crecimiento económico en los países latinoamericanos; a su vez, Corbo encuentra una alta correlación entre las tasas de inversión y las de ahorro en América Latina, y mucho mayor en 1981-1985, período de contracción del mercado internacional de capitales para América Latina.
 - 5 Una presentación excelente del modelo Mundell-Fleming se encuentra en Frenkel y Razin (1992, cap. 3). Aquí nos referimos a su versión clásica (el producto no responde a factores de demanda).
 - 6 Stadler (1994) afirma que se pueden tener funciones agregadas de exceso de demanda bien comportadas sin basarlas en la figura del agente representativo optimizador, a condición de que no haya ilusión monetaria por parte de los agentes y que estos se sometan a sus restricciones presupuestales. Funciones agregadas bien comportadas no requieren el supuesto de optimización individual. De otra parte, un modelo «profesional» de la economía colombiana como el de Easterly (1994) puede reducirse al IS-BP para el análisis del corto plazo de las variables reales (es decir, haciendo abstracción del efecto de la inversión sobre la capacidad productiva).
 - 7 Este es un ejemplo de Auerbach y Kotlikoff (1995). En el cap. 2 consideran que una caída autónoma de la productividad del trabajo conduce a menor tasa de ahorro (por causa de menor salario real y menor ahorro de los trabajadores (los «jóvenes»), que ahorran más que los no trabajadores («los viejos»)).
 - 8 Sea: $0 < \frac{\partial c}{\partial y} = \bar{c}_y < \frac{c}{y} < 1$;
- Por tanto:
- $$\frac{dy/y}{dc/c} = \frac{dc/c}{c \bar{c}_y} < 1; \quad \text{es decir:}$$
- $$a/y = f(dy/y, \dots), f_{dy/y} > 0;$$
- Siendo:
y: producto nacional;
c: consumo; a=y-c: ahorro nacional
- 9 López (1994) encontró evidencia econométrica en favor de la hipótesis de que el consumo privado en Colombia depende parcial pero significativamente del ingreso privado disponible (ubicándose $\partial c/\partial y$ entre 0,6 y 0,95), en tanto que no encontró evidencia de efectos de la tasa de interés sobre el consumo.
 - 10 De acuerdo con esta interpretación, la política monetaria sólo logró retrasar el momento en el cual la mayor entrada de capitales y la menor tasa externa de interés generaron la caída de la tasa interna; posteriormente (después del segundo trimestre de 1991) se abandonó el intento de impedir esta influencia.
 - 11 Sobre el impulso reciente dado al consumo privado por el aflojamiento de las restricciones de liquidez, véase: Notas Editoriales, Revista del Banco de la República, octubre, 1994.
 - 12 Mientras que entre 1985 y 1991 el consumo público real creció a una tasa anual media de 4,8%, se estima que entre 1992 y 1994 lo hizo al 10,2% en promedio.
 - 13 Chang et al. (1990) presentan una versión bastante didáctica y completa del modelo Mundell-Fleming keynesiano (de oferta y demanda agregadas en economía abierta).
 - 14 Greene y Villanueva (1991) encontraron que la tasa de interés real reduce la inversión privada (elasticidad: 0,1) con datos de 23 países del período 1975-1987; también encontraron que sobre la inversión privada influyen positivamente el crecimiento rezagado del producto *per capita*, la inversión pública/PIB (aunque ésta no se mostró significativa al 99% de confiabilidad) y el ingreso *per capita*; las otras variables de influencia negativa y significativa fueron la inflación, el servicio de la deuda externa/ex-

- portaciones y la deuda/PIB. Para el caso colombiano, Cárdenas y Olivera (1995) encontraron evidencia de que la inversión privada, con posterioridad a 1950, ha dependido no sólo del crecimiento del producto sino también del precio relativo de los bienes de capital y del «factor interés real» definido como 1 más la tasa nominal de interés más la tasa de depreciación menos la valorización esperada de los bienes de capital.
- 15 Pero hay otra explicación alternativa del hecho de que cuando aumenta el ingreso disponible aumenta el ahorro y la fracción ahorrada del ingreso; dicha explicación es la hipótesis de que el consumo de hoy depende del consumo pasado a causa de la persistencia de hábitos. Esta hipótesis está asociada a un trabajo de Carroll y Weil de 1993 (citado por Edwards, 1995).
- 16 Basados en tres encuestas: encuesta de ingresos de 1985 que permitió «rastrear» las historias de ingresos de quienes habían sido jefes de hogar entre 1968 y 1985, encuesta de gastos familiares de 1960-1961 y encuesta de finanzas de consumidores de 1962-1963.
- 17 Sobre esta hipótesis, su relevancia y posibles limitaciones, véase Barro (1990). Corbo y Schmidt-Hebel (1991) reportan evidencia parcialmente favorable a esta hipótesis, en el sentido de que las expansiones del ahorro público se acompañan de alguna reducción del ahorro privado, aunque sin una plena neutralización. Para el caso colombiano, véase Carrasquilla y Rincón (1990). Sin embargo, las hipótesis de consumo autodependiente, formación de hábitos, etc., pueden generar una «equivalencia observacional» con la hipótesis de equivalencia ricardiana; por ejemplo, si el consumo presente sólo depende del consumo pasado, las alteraciones del ingreso disponible causadas por cambios fiscales se traducen en cambios del ahorro privado en dirección contraria a los cambios del ahorro público.
- 18 La teoría del ahorro basada en estas consideraciones se remonta a finales del siglo XIX y el primer modelo matemático es de Ramsey (de los años 20 de este siglo). 10 años antes de formular su función consumo ya Keynes conocía bien la teoría y este modelo.
- 19 El modelo omite la inversión. Esto parece absurdo en un modelo de ahorro; pero no lo es: supongamos que la ampliación de la capacidad productiva depende, en lo fundamental, de enganchar más trabajadores al aparato productivo y de un cambio técnico no incorporado en nuevo equipo; en tal caso es válido el intento de entender el ahorro sin recurrir a los efectos de la inversión. Sin embargo, más adelante se verá que aún si se considera que el ahorro se convierte en mayor capacidad productiva pueden permanecer válidas las conclusiones sobre el ahorro derivadas del modelo que omite la inversión. Una aplicación del modelo sin inversión (con producto exógeno) al caso colombiano se encuentra en Calvo, Reinhart y Vegh (1994).
- 20 Deaton (1992) utilizó este supuesto para demostrar que en periodos medios o largos el consumo tiende a igualarse al ingreso disponible.
- 21 King (1993) afirma que una curva IS «correcta» (si la hubiese) debería incluir todo lo pertinente a la distinción entre factores transitorios y permanentes, a la determinación de las expectativas, etc. De otra parte, las tesis de: a) una equivalencia bajo ciertos supuestos de los modelos IS-BP y de optimización intertemporal y b) una superioridad del último para ciertos propósitos son defendidas pero sólo en un nivel muy general por Genberg y Swoboda (1992).
- 22 Gaviria (1993) replicó el trabajo de Ostry y Reinhart para Colombia con series de 1970-1988; encontró resultados bastante compatibles: una elasticidad de sustitución intratemporal de 0.6 y una elasticidad de sustitución intertemporal de 0.24. Con estos parámetros también pudo deducir el cumplimiento del teorema de Obstfeld para Colombia (sólo las variaciones transitorias de los términos de intercambio afectan la tasa de ahorro).
- 23 Para Colombia encontraron una elasticidad de sustitución intertemporal en el rango 0,41 - 0,77, es decir, entre 2 y 3 veces la encontrada por Gaviria (op. cit.).
- 24 Sobre la importancia de este factor, véase Calvo et al. 1993.
- 25 Puesto que la elasticidad del consumo agregado al consumo de cada uno de los dos bienes (α ó $1-\alpha$) es siempre positiva, es condición suficiente que $1/\sigma > 0$ para que $1-\alpha\rho > 0$, siendo $\rho = 1-\sigma$ (como se aclara en el anexo II). Esta condición es suficiente para que $\partial C_{n1}/\partial r_1 < 0$, siendo C_{n1} = consumo real del bien no transable en el período presente, r_1 = tasa de interés real en el presente. En este modelo el incremento de la tasa de interés, *ceteris paribus*, no eleva el consumo si el agente es un gran ahorrador neto (el llamado efecto ingreso) en vista de que hay un motivo herencia y, por tanto, no se impone la restricción de patrimonio final nulo (que equivale a que el valor presente del consumo sea igual al valor presente del ingreso).

- 26 La apertura de la cuenta de capitales o el establecimiento de un ancla cambiaría en un ambiente en el cual la inflación prevista cae poco puede conducir a una caída transitoria de la tasa de interés real (por caída transitoria de la tasa esperada de devaluación o por caídas del diferencial entre las tasas interna y externa de interés, en tanto que se reduce muy poco la inflación prevista) y, por tanto, a un auge transitorio del consumo (y de la inversión), con caídas de la tasa de ahorro, revaluación real y déficit en la cuenta corriente (Kiguel y Liviatan 1992).
- 27 Un proceso de carácter transitorio pero prolongado fue esbozado por la vieja economía clásica: la acumulación de capital en los países desarrollados reduce la tasa de interés real e impulsa la inversión de capital de largo plazo en los países atrasados (los superávits en la cuenta corriente de aquellos se explican por tasas de descuento menores que las de interés y una productividad del trabajo compatible con una tasa de cambio real más baja frente a la de los países atrasados); en estos últimos cae, por ende, la tasa de interés real y se inicia un proceso de desarrollo caracterizado, entre otras cosas, por un déficit en la cuenta corriente financiado por las entradas de capital provenientes de los más adelantados y por una creciente acumulación de capital.
- 28 Una reacción crítica a esta hipótesis provino de Gale y Scholz (1994). Estos autores mostraron nueva evidencia de la importancia relativa de las transferencias (voluntarias) *inter vivos* y de las herencias (voluntarias o no) en la acumulación de riqueza en EU; ambas ascienden a 51% de la riqueza agregada del sector privado (y esto sin contar con los pagos de la educación universitaria de los hijos). Esto demuestra, según ellos, que el modelo del ciclo de vida es incompleto y que es más pertinente el modelo de «dinastías», es decir, el modelo que supone un agente que vive indefinidamente o, alternativamente, que se preocupa por dejar herencias a sus descendientes y estos a los suyos, etc. Pero en defensa de la hipótesis del ciclo de vida está lo reportado por Auerbach y Kotlikoff (1995), quienes señalan que en EU hay un proceso creciente de conversión de activos de propiedad de ancianos por rentas vitalicias y que esto puede estar reduciendo el ahorro.
- 29 Quizá porque las imperfecciones en el mercado internacional de capitales conllevan a una restricción de crédito para quienes tienen un alto endeudamiento previo.
- 30 Kirman (1992) critica el modelo del agente representativo, pero alude a investigaciones que demuestran que la heterogeneidad de los agentes puede conducir, en el agregado, a funciones de producción o de demanda «bien comportadas», de comportamiento regular y conforme a lo predicho por la teoría económica y que apoyan la existencia de equilibrios únicos y estables. Sin embargo, Lewbel (1989) sí cree que bajo ciertas circunstancias cabe la metáfora del agente representativo: «It is a fact that the use of a representative consumer assumption in most macro work is an illegitimate method of ignoring valid aggregation concerns. ... The solution this paper proposes is to discover what assumptions regarding both functional forms of demands and distributions of agents are required to make the demand equations arising from exact aggregation equal to those arising from utility maximizing by a representative agent. ... In this way one can both deal explicitly with aggregation and have a representative consumer model at one's disposal». En el mismo sentido de Lewbel, pero incluso más enfático en la conveniencia de tener modelos de agente representativo como complementos del análisis de agentes heterogéneos, véase Stoker (1993).
- 31 Huggett (1995) demostró que si los agentes son heterogéneos (su distribución inicial de riqueza no es uniforme por soportar *shocks* específicos en sus dotaciones) y hay restricciones de crédito, la trayectoria del capital es diferente a la de *steady state* bajo mercados completos: en aquel caso el capital es mayor y tiene una fluctuación.
- 32 De acuerdo con Attanasio y Weber (1994) el auge coyuntural del consumo en el Reino Unido de finales de los años 80 se explica, básicamente, por una revisión al alza del ingreso permanente de los jóvenes; la valorización real de las viviendas (bien no transable) y el déficit en la cuenta corriente se explican, a su vez, por dicha revisión (una aplicación de modelo del agente representativo).

REFERENCIAS

- Aghevli, Bijan; James Boughton, Peter Montiel, Delano Villanueva y Geoffrey Woglom; *The Role of National Saving in the World Economy. Recent Trends and Prospects*. FMI, marzo, 1990.
- Attanasio, Orazio y Guglielmo Weber; «*The UK Consumption Boom of the Late 1980s: Aggregate Implications of Microeconomic Evidence*»; *The Economic Journal*, Vol. 104, No. 427 (noviembre), 1994.
- Auerbach, Alan y Laurence Kotlikoff; *Macroeconomics. An Integrated Approach*, South-Western College Publishing, Cincinnati, 1995.
- Barro, Robert; «The Ricardian Approach to Budget Deficits», cap. 9 de *Macroeconomic Policy*, Harvard University Press, Cambridge (Ma.), 1990.
- Calvo, Guillermo, Leonardo Leiderman y Carmen Reinhart; «Afluencia de capital y apreciación del tipo de cambio real en América Latina: el papel de los factores externos», en *Macroeconomía de los flujos de capital en Colombia y América Latina* (compiladores: M. Cárdenas y L. J. Garay), Tercer Mundo Editores-Fedesarrollo, Bogotá, 1993.
- Calvo, Guillermo, Carmen Reinhart y Carlos Vegh; «*Ensayos sobre Política Económica*, No. 25 (junio), 1994.
- Cárdenas, Mauricio y Mauricio Olivera; *La crítica de Lucas y la inversión en Colombia: nueva evidencia* (versión preliminar no publicada), Bogotá, abril de 1995.
- Carroll, Christopher; «How Does Future Income Affect Current Consumption?», *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. CIX, No. 1 (febrero), 1994.
- Chang, Wen Ya, Ching Chong Lai y Yun Peng Chu; «Interest Rates, Exchange Rates, and Aggregate Supply: A Comment», *Journal of Macroeconomics*; Vol. 12, No. 3 (verano) 1990.
- Corbo, Vittorio y Klaus Schimdt-Hebbel; «Public Policies and Saving in Developing Countries», *Journal of Development Economics*, Vol. 36, No. 1, 1991.
- Corbo, Vittorio; «Principales determinantes del crecimiento latinoamericano», en *Crecimiento económico. Teoría, instituciones y experiencia internacional* (ed. Mónica Aparicio y William Easterly), Banco Mundial-Banco de la República, Bogotá, 1995.
- Deaton, Angus; «Household Saving in LDCs: Credit Markets, Insurance and Welfare», en *Saving Behavior: Theory, International Evidence and Policy Implications* (ed. E. Koskela y J. Paunio), Blackwell Publishers, Oxford, 1992.
- Easterly, William; «La macroeconomía del déficit del sector público: el caso de Colombia», en *Estabilización y crecimiento* (compilador: R. Steiner), Tercer Mundo Editores-Fedesarrollo, Bogotá, 1994.
- Edwards, Sebastián; «¿Por qué son tan bajas las tasas de ahorro en América Latina?», en *Crecimiento económico. Teoría, instituciones y experiencia internacional* (ed. Mónica Aparicio y William Easterly), Banco Mundial-Banco de la República, Bogotá, 1995.
- Faruqee, Hamid y Aasim Husain; «Saving Trends in Southeast Asia: A Cross-country Analysis», IMF Working Paper, WP/95/39, abril, 1995.

-
- Frenkel, Jacob y Assaf Razin; *Fiscal Policies and the World Economy* (2a. edición), MIT Press, Cambridge (Ma.), 1992.
- Gale, William y John Scholz; «Intergenerational Transfers and the Accumulation of Wealth», *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 8, No. 4 (otoño), 1994.
- Gaviria, Alejandro; «El ahorro privado y los términos de intercambio: el caso colombiano», *Ensayos sobre Política Económica*, No. 23 (junio), 1993.
- Genberg, Hans y Alexander Swoboda; «Saving, Investment and the Current Account», en *Saving Behavior: Theory, International Evidence and Policy Implications* (ed. E. Koskela y J. Paunio), Blackwell Publishers, Oxford, 1992.
- Greene, Joshua y Delano Villanueva; «Private Investment in Developing Countries. An Empirical Analysis», *IMF Staff Papers*, Vol. 38, No. 1 (marzo), 1991.
- Haque, Nadeem U., Kajal Lahiri y Peter Montiel; «A Macroeconometric Model for Developing Countries», *IMF Staff Papers*, Vol. 37, No. 3 (septiembre), 1990.
- Hubbard, R. Glenn, Jonathan Skinner y Stephen Zeldes; «Expanding the Life-Cycle Model: Precautionary Saving and Public Policy», *The American Economic Review*, Vol. 84, No. 2 (mayo), 1994.
- Huggett, Mark; *The One-Sector Growth Model With Idiosyncratic Shocks*, University of Illinois (documento no publicado), Urbana, marzo, 1995.
- Jappelli, Tullio y Marco Pagano; «Saving, Growth and Liquidity Constraints», *Quarterly Journal of Economics*, Vol. CIX, No. 1 (febrero), 1994.
- Kiguel, Miguel y Nissan Liviatan; «the Business Cycle Associated with Exchange Rate-Based Stabilizations», *The World Bank Economic Review*, Vol. 6, No. 2 (mayo), 1992.
- King, Robert; «Will the New Keynesian Macroeconomics Resurrect the IS-LM Model?», *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 7, No. 1 (invierno), 1993.
- Kirman, Alan; «Whom or What Does the Representative Individual Represent?», *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 6, No. 2 (primavera), 1992.
- Lewbel, Arthur; «Exact Aggregation and a Representative Consumer», *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. CIV, No. 3 (agosto), 1989.
- López, Alejandro; «La teoría del ingreso permanente y las restricciones de liquidez en Colombia», en *Estabilización y crecimiento* (R. Steiner, compilador), Tercer Mundo Editores-Fedesarrollo, Bogotá, 1994.
- Modigliani, Franco; «Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations», *The American Economic Review*, Vol. 76, No. 3 (junio), 1986.
- Obstfeld, Maurice; «Aggregate Spending and the Terms of Trade: Is There a Laursen-Metzler Effect?», *the Quarterly Journal of Economics*, Vol. , No. (mayo), 1982.
- Ogaki, Masao, Jonathan Ostry y Carmen Reinhart; «Saving Behavior in Low-and Middle-Income Developing Countries: A Comparison», Working Paper, WP/94, FMI, diciembre, 1994.

Ostry, Jonathan y Carmen Reinhart; «Private Saving and Terms of Trade Shocks», *IMF Staff Papers*, Vol. 39, No. 3 (septiembre), 1992.

Razin, Assaf; «Capital Movements, Intersectoral Resource Shifts and the Trade Balance», *European Economic Review*, Vol. 26, Nos. 1-2 (octubre-noviembre), 1984.

Stadler, George; «Real Business Cycles», *Journal of Economic Literature*, Vol. XXXII, No. 4 (diciembre), 1994.

Stoker, Thomas; «Empirical Approaches to the Problem of Aggregation over Individuals», *Journal of Economic Literature*, Vol. XXXI, No. 4 (diciembre), 1993.

ANEXO I

EL MODELO CLASICO TRADICIONAL (IS-BP)

A. El modelo

- (I) $Y = \bar{Y}^s$;
 (II) $Y = Y^D = E(Y, r, l, g) + B(Y, c)$;
 $E_Y > 0, E_r < 0, E_l < 0, E_g > 0, B_Y < 0, B_c > 0$;
 (III) $r = r^* + F(B/Y), F' < 0$

Donde:

- Y^s : producto ofrecido
 Y^D : producto demandado con exportaciones netas
 E : gasto agregado real
 B : exportaciones reales netas
 r : tasa de interés real
 l : grado de restricción del crédito
 g : indicador de política fiscal expansiva
 c : tasa de cambio real
 r^* : tasa real externa de interés

Se supone que II puede justificarse parcialmente a partir de condiciones de optimización intertemporal sujetas a restricciones presupuestales (como se muestra en el anexo II) pero que no se aplica la hipótesis de equivalencia ricardiana; se supone, también, que hay restricciones de liquidez (de crédito) para las compras privadas de bienes de consumo y que el consumo privado u otros componentes del gasto agregado no dependen de los valores rezagados de sí mismos ni de los de otras variables.

La ecuación III implica movilidad internacional imperfecta de capitales.

El sistema I, II, III implica (en equilibrio):

$$\begin{aligned} -dY &= 0 \\ -(1 - E_Y - B_Y)dY + E_r dr + B_c dc &= -E_l dl - E_g dg \\ -dr + F' d(B/Y) &= -dr^* \end{aligned}$$

Pero:

$$d(B/Y) = \frac{B_Y dY + B_c dc}{Y} - \frac{B}{Y^2} dY$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} -dy &= 0 \quad (1) \\ -(1 - E_Y - B_Y)dY + E_r dr + B_c dc &= E_l dl - E_g dg \quad (2) \end{aligned}$$

$$\frac{F'}{Y} (B_Y - B/Y)dY - dr + \frac{F'}{Y} B_c = -dr^* \quad (3)$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -(1 - E_Y - B_Y) & E_r & B_c \\ \frac{F'}{Y} (B_Y - B/Y) & -1 & \frac{F' B_c}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy \\ dr \\ dc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E_l dl - E_g dg \\ -dr^* \end{bmatrix}$$

Dada la exogeneidad de Y , el sistema puede reducirse (para $dY=0$) a:

$$\begin{bmatrix} E_r & B_c \\ -1 & \frac{F' B_c}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ dc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_l dl - E_g dg \\ -dr^* \end{bmatrix}$$

En términos matriciales el sistema anterior puede escribirse así:

$$\begin{aligned} Ad &= X \quad \Rightarrow \\ d &= A^{-1}X \quad (IV) \end{aligned}$$

Siendo: d vector columna (dr, dc), A^{-1} la inversa de la matriz A y X el vector columna de los impactos de las variaciones de las variables exógenas l, g y r^* .

La matriz A^{-1} tiene los siguientes elementos:

$$a_{11} = F' \frac{B_c}{Y} / \Delta < 0; \quad a_{12} = -B_c / \Delta < 0;$$

$$a_{21} = 1 / \Delta > 0; \quad a_{22} = E_r / \Delta < 0;$$

Siendo Δ el determinante de la matriz

$$A = \left(\frac{E_r}{Y} F' + 1 \right) B_c > 0$$

El sistema IV implica:

$$dr = a_{11}(-E_l dl - E_g dg) + a_{12}(-dr^*)$$

$$dc = a_{21}(-E_l dl - E_g dg) + a_{22}(-dr^*)$$

Por tanto, los multiplicadores de las variables exógenas son:

$$\frac{\partial r}{\partial l} = -a_{11} E_l < 0; \quad \frac{\partial r}{\partial g} = -a_{11} E_g > 0; \quad \frac{\partial r}{\partial r^*} = -a_{12} > 0;$$

$$\frac{\partial c}{\partial l} = -a_{21} E_l > 0; \quad \frac{\partial c}{\partial g} = -a_{21} E_g < 0; \quad \frac{\partial c}{\partial r^*} = -a_{22} > 0;$$

B. Dinámica de ajuste y estabilidad

Puesto que el sistema IV es de equilibrio con $dY = 0$, consideremos dos variables de ajuste, r y c , y su comportamiento ante eventuales perturbaciones o desequilibrios. Si existe la tendencia a regresar al equilibrio se dice que el sistema es estable y, si lo es, tiene sentido realizar ejercicios de estática comparativa como los implícitos en IV.

Supongamos (para una evolución en el tiempo t):

$$\frac{dr}{dt} = j(Y^D - Y^S); \quad j' > 0, \quad j(0) = 0 \quad \text{(V)}$$

$$\frac{dc}{dt} = K \left(F(B/Y) - F(\hat{B}/Y^S) \right); \quad K' > 0, \quad K(0) = 0 \quad \text{(VI)}$$

V supone que la tasa de interés real crece cuando se presenta un desequilibrio *ex-ante* entre demanda y oferta agregadas; VI supone que la tasa de cambio real sube si hay un déficit *ex-ante* de oferta de divisas; este déficit se asocia, aquí, a un margen F mayor al de equilibrio. El margen de equilibrio depende de B de equilibrio (\hat{B}) y del nivel de producto de equilibrio, Y^S .

Tomando el componente de primer orden de la expansión de Taylor de las ecuaciones V y VI en el entorno de los valores de equilibrio de sus variables (y para Y^S y las demás variables exógenas constantes) obtenemos la siguiente aproximación:

$$\frac{dr}{dt} = j' E_r (r - \hat{r}) + j' B_c (c - \hat{c});$$

$$\frac{dc}{dt} = K' \frac{F'}{Y} B_c (c - \hat{c})$$

Siendo \hat{r} y \hat{c} los valores de equilibrio.

Es decir:

$$\begin{bmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{dc}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j' E_r & j' B_c \\ 0 & K' \frac{F' B_c}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - \hat{r} \\ c - \hat{c} \end{bmatrix} \quad \text{(VII)}$$

VII es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden; su solución tiene la siguiente forma:

$$r(t) = \alpha_{11} e^{\lambda_1 t} + \alpha_{21} e^{\lambda_2 t} + \hat{r} \quad \text{(VIII)}$$

$$c(t) = \alpha_{12} e^{\lambda_1 t} + \alpha_{22} e^{\lambda_2 t} + \hat{c} \quad \text{(IX)}$$

Siendo los α_{ij} ($i, j = 1, 2$) constantes y los λ_i ($i = 1, 2$) las raíces de la ecuación: $|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = 0$, en tanto que \mathbf{B} es la matriz del sistema VII. Este sistema es estable si, como lo hacen evidente VIII y IX, los λ_i ($i = 1, 2$) son reales negativos o complejos cuya parte real es negativa.

La ecuación $|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ equivale a $\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$,

$$\text{donde: } \beta = j' E_r + \frac{K' F' B_c}{Y} < 0$$

$$\gamma = \frac{j' E_r K' F' B_c}{Y} > 0 \quad \text{sea: } \gamma \Rightarrow 0$$

Por tanto:

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \Rightarrow \beta$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \Rightarrow 0$$

Pero $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$. En efecto, el conjunto de estos dos valores (el vector propio α_2 correspondiente al valor propio λ_2) se deduce de la solución del sistema $(\mathbf{B} - \lambda_2 \mathbf{I}) \alpha_2 = 0$

Puesto que tres de los cuatro elementos de la matriz \mathbf{B} son no nulos, entonces la única solución posible de este sistema (para $\lambda_2 = 0$) es $\alpha_2 = 0$; por tanto, VIII y IX implican que:

$$r(t) = \alpha_{11} e^{\lambda_1 t} + \hat{r},$$

$$c(t) = \alpha_{12} e^{\lambda_1 t} + \hat{c}, \quad \lambda_1 = \beta < 0,$$

Con lo cual se demuestra que el sistema IV es estable. Si éste es estable entonces el sistema I, II, III es estable, a menos que Y^s fuese inestable.

C. Estabilidad y estática comparativa: análisis gráfico

Puesto que el sistema es estable se puede utilizar para ejercicios de estática comparativa

asociados a cambios en las variables exógenas. La ecuación 2 para $dY = dl = dg = 0$ implica la siguiente condición (de equilibrio en el mercado de producto):

$$E_r dr + B_c dc = 0 \Rightarrow \left. \frac{dr}{dc} \right|_{IS} = -\frac{B_c}{E_r} > 0$$

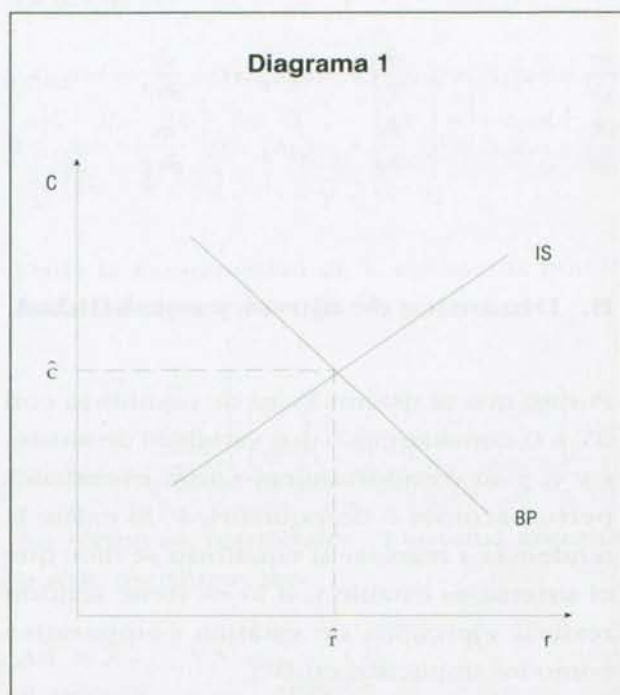
En el plano r, c $\left. \frac{dr}{dc} \right|_{IS}$ representa la pendiente

de la curva de equilibrio del mercado de producto, llamada usualmente curva IS.

Así mismo, bajo la condición $dY = dr^* = 0$, la ecuación 3 implica la siguiente condición (de equilibrio en el mercado de divisas o de balanza de pagos):

$$dr = \frac{F' B_c}{Y} dY \Rightarrow \left. \frac{dr}{dY} \right|_{BP} = \frac{F' B_c}{Y} < 0$$

Por tanto, el sistema en equilibrio se representa así:



1. Desplazamientos de IS

Sea $dl = dg = 0$; la ecuación 2 implica que:

$$(1 - E_Y - B_Y)dY = E_r dr + B_c dc \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial Y} \right|_{IS} = \frac{1 - E_Y - B_Y}{E_r} < 0 \quad (\text{para } 1 - E_Y - B_Y > 0)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial Y} \right|_{IS} = \frac{1 - E_Y - B_Y}{B_c} > 0 \quad (\text{para } 1 - E_Y - B_Y > 0)$$

En términos del diagrama 1 lo anterior significa que el aumento del producto desplaza la curva IS a la derecha.

Sea $dY = dg = 0$; la ecuación 2 implica que:

$$E_r dr + B_c dc = E_l dl \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial l} \right|_{IS} = -\frac{E_l}{E_r} < 0; \quad \left. \frac{\partial c}{\partial l} \right|_{IS} = -\frac{E_l}{B_c} > 0$$

Esto significa que el aumento del grado de restricción del crédito desplaza la curva IS a la derecha.

Sea $dY = dl = 0$; la ecuación 2 implica que:

$$E_r dr + B_c dc = -E_g dg \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial g} \right|_{IS} = -\frac{E_g}{E_r} > 0; \quad \left. \frac{\partial c}{\partial g} \right|_{IS} = -\frac{E_g}{B_c} < 0$$

Según esto, la política fiscal expansiva desplaza a la izquierda la curva IS.

2. Desplazamientos de BP

Sea $dr^* = 0$; la ecuación 3 implica que:

$$\frac{F'}{Y}(B_Y - B/Y)dY = dr - \frac{F'}{Y}B_c dc \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial Y} \right|_{BP} = \frac{F'}{Y}(B_Y - B/Y) \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow (B_Y - B/Y) \begin{matrix} \leq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial Y} \right|_{BP} = -\frac{(B_Y - B/Y)}{B_c} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow (B_Y - B/Y) \begin{matrix} \leq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

El aumento del producto puede desplazar la curva BP a la derecha o a la izquierda.

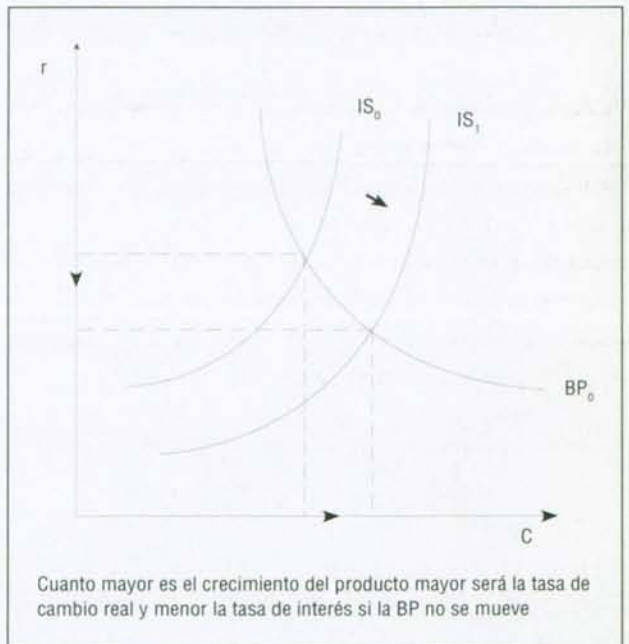
Sea $dY = 0 \Rightarrow$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial r^*} \right|_{BP} = 1; \quad \left. \frac{\partial c}{\partial r^*} \right|_{BP} = -\frac{1}{F' B_c / Y} > 0$$

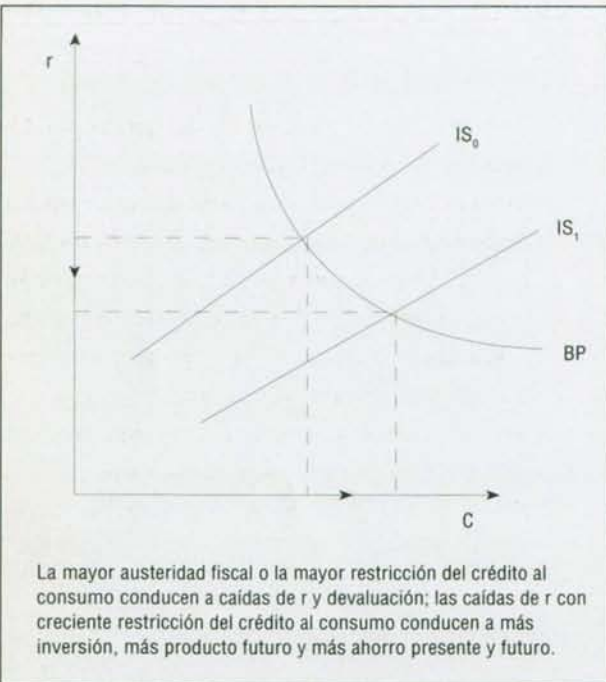
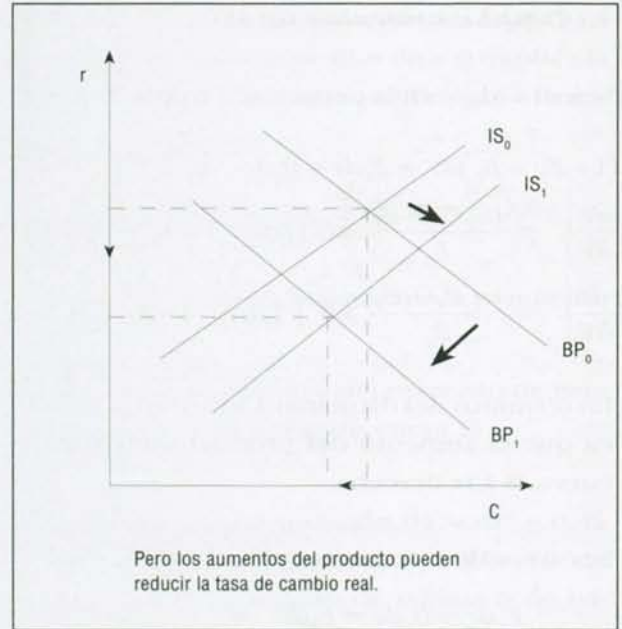
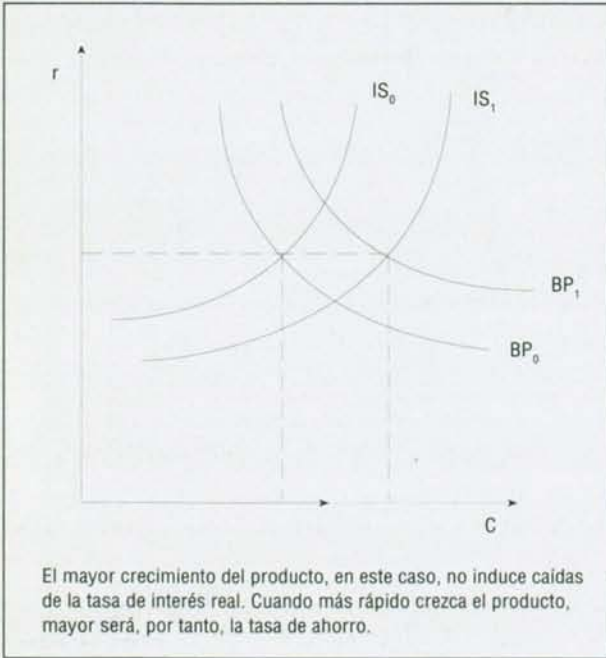
El aumento de la tasa externa real de interés desplaza la curva BP a la derecha.

Este análisis gráfico confirma los resultados de la sección A en la parte referida a los multiplicadores.

D. Aplicación del modelo



Pero si $\left[\begin{matrix} \left. \frac{\partial r}{\partial Y} \right|_{BP} > 0 \\ (B_Y - B/Y) < 0 \Rightarrow \\ \left. \frac{\partial c}{\partial Y} \right|_{BP} > 0 \end{matrix} \right] \Rightarrow$
desplazamiento de BP a la derecha



En efecto, en este modelo si

$$(B_Y - B/Y) > 0, \text{ entonces}$$

$$\left. \frac{\partial r}{\partial Y} \right|_{BP} < 0, \left. \frac{\partial C}{\partial Y} \right|_{BP} < 0$$

es decir, la curva BP se desplaza a la izquierda. Pero $B_Y < 0$; en este caso se requiere que B sea negativo y que $|B/Y| > |B_Y|$.

ANEXO II

EL MODELO CLASICO INTERTEMPORAL (SIN INVERSION Y CON MOVILIDAD PERFECTA DE CAPITAL)

$$\text{Sea } \Omega = U_1 + \beta U_2 + \gamma v, \quad (I)$$

$$U_i = \frac{(C_{ni}^\alpha C_{ti}^{1-\alpha})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} = \frac{(C_{ni}^\alpha C_{ti}^{1-\alpha})^\rho - 1}{\rho};$$

$$0 < \alpha < 1; \rho \geq 0; i = 1, 2;$$

$$v = \frac{A_2^\rho - 1}{\rho};$$

Siendo:

Ω : Valor presente de la serie de utilidades periódicas.

U_i : Utilidad del período i proveniente del consumo propio.

$$\beta : \frac{1}{1+d}$$

d : Tasa subjetiva de descuento de la utilidad del consumo propio.

v : Utilidad por la herencia a legar.

A_2 : Patrimonio final (o herencia a legar).

$$\gamma : \frac{1}{1+g}$$

g : Tasa subjetiva de descuento de la utilidad de la herencia a legar.

C_n : Consumo real (*per capita*) del bien no transable.

C_t : Consumo real (*per capita*) del bien transable.

α : Elasticidad del consumo real agregado

al consumo del bien no transable.

$$\rho : 1 - \sigma$$

$1/\sigma$: Elasticidad de sustitución intertemporal.

El problema del agente representativo es:

Maximizar Ω , sujeto a las siguientes restricciones:

$$A_0 (1 + r_0) + Y_1 - (C_{n1} P_{n1} + C_{t1}) = A_1 \quad (IIa)$$

$$A_1 (1 + r_1) + Y_2 - (C_{n2} P_{n2} + C_{t2}) = A_2 \geq 0 \quad (IIb)$$

Siendo:

A_0 : Patrimonio al principio del período 1 (en términos del bien transable)

r_0 : Tasa de interés real al final del período 0

Y_i : Producto real (exógeno) del período i ($i=1,2$) en términos del bien transable

r_1 : Tasa de interés real al final del período 1 (la tasa relevante para las decisiones de abstención de consumo)

P_{ni} : Precio relativo del bien no transable (en términos del bien transable) en el período i ($1/P_{ni}$ es la tasa de cambio real del período i ($i=1,2$)).

Pero:

$$Y_i = Y_{ti} + P_{ni} Y_{ni} \quad (IIIa)$$

en tanto que, al no existir inversión:

$$Y_{ni} = C_{ni} \quad (IIIb)$$

$$Y_{ti} = C_{ti} + X_i \quad (IIIc)$$

Siendo:

Y_{n1} : Producto real no transable
 Y_{t1} : Producto real transable
 X_1 : Exportaciones netas del bien transable.

Por tanto, las restricciones se traducen en:

$$\begin{aligned}
 A_0(1+r_0) + Y_{t1} + P_{n1}Y_{n1} - C_{n1}P_{n1} - C_{t1} &= A_1 \\
 A_1(1+r_1) + Y_{t2} + P_{n2}Y_{n2} - C_{n2}P_{n2} - C_{t2} &= A_2 \\
 &= >
 \end{aligned}$$

$$A_0(1+r_0) + X_1 = A_1 \quad (\text{IIIc})$$

$$A_1(1+r_1) + X_2 = A_2 \quad (\text{III d})$$

Pero antes de utilizar las restricciones III veamos las implicaciones de la maximización de la función objetivo Ω bajo las restricciones II.

Para esto, conviene reducir las restricciones II, así:

$$\begin{aligned}
 [A_0(1+r_0) + Y_1 - C_{n1}P_{n1} - C_{t1}] (1+r_1) + Y_2 - \\
 C_{n2}P_{n2} - C_{t2} = A_2
 \end{aligned}$$

Por tanto, el problema equivale a:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } L &= \frac{(C_{n1}^\alpha C_{t1}^{1-\alpha})^\rho - 1}{\rho} + \frac{\beta [(C_{n2}^\alpha C_{t2}^{1-\alpha})^\rho - 1]}{\rho} \\
 &+ \gamma \left(\frac{A_2^\rho - 1}{\rho} \right) \\
 &+ \lambda \left\{ [A_0(1+r_0) + Y_1 - C_{n1}P_{n1} - C_{t1}] (1+r_1) \right. \\
 &\quad \left. + Y_2 - C_{n2}P_{n2} - C_{t2} - A_2 \right\}
 \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dC_{n1}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial C_{n1}} - \lambda(1+r_1)P_{n1} = 0 \Rightarrow \\
 (C_{n1}^\alpha C_{t1}^{1-\alpha})^{\rho-1} \alpha C_{n1}^{\alpha-1} C_{t1}^{1-\alpha} &= \lambda(1+r_1)P_{n1} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dC_{t1}} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial C_{t1}} - \lambda(1+r_1) = 0 \Rightarrow \\
 (C_{n1}^\alpha C_{t1}^{1-\alpha})^{\rho-1} (1-\alpha) (C_{n1}^\alpha C_{t1}^{-\alpha}) &= \lambda(1+r_1) \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dC_{n2}} = 0 &\Rightarrow \beta \frac{\partial U_2}{\partial C_{n2}} - \lambda P_{n2} = 0 \Rightarrow \\
 \beta (C_{n2}^\alpha C_{t2}^{1-\alpha})^{\rho-1} \alpha C_{n2}^{\alpha-1} C_{t2}^{1-\alpha} &= \lambda P_{n2} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dC_{t2}} = 0 &\Rightarrow \beta \frac{\partial U_2}{\partial C_{t2}} - \lambda = 0 \Rightarrow \\
 \beta (C_{n2}^\alpha C_{t2}^{1-\alpha})^{\rho-1} (1-\alpha) C_{n2}^\alpha C_{t2}^{-\alpha} &= \lambda \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dA_2} = 0 &\Rightarrow \gamma A_2^{\rho-1} - \lambda = 0 \Rightarrow \\
 \gamma A_2^{\rho-1} &= \lambda \quad (5)
 \end{aligned}$$

Comparando (1) y (2), y (3) y (4) =>

$$\frac{C_{t1}}{C_{n1}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} P_{n1}; \quad \frac{C_{t2}}{C_{n2}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} P_{n2} \quad (6)$$

Además, (1) y (3) =>

$$\frac{\partial U / \partial C_{n1}}{\beta \partial U / \partial C_{n2}} = (1+r_1) \frac{P_{n1}}{P_{n2}} \Rightarrow \frac{\partial U / \partial C_{n1}}{\partial U / \partial C_{n2}} = \left(\frac{1+r_1}{1+d} \right) \frac{P_{n1}}{P_{n2}}$$

$$\text{es decir: } \frac{C_{n1}^{\alpha\rho-1} C_{t1}^{\rho-\alpha\rho}}{C_{n2}^{\alpha\rho-1} C_{t2}^{\rho-\alpha\rho}} = \left(\frac{1+r_1}{1+d} \right) \frac{P_{n1}}{P_{n2}} \quad (7)$$

(3) y (5) =>

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_2 / \partial C_{n2}}{\partial v / \partial A_2} = \frac{\gamma}{\beta} P_{n2} &\Rightarrow \\
 A_2 = \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma P_{n2}} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} C_{n2}^{\frac{\alpha\rho-1}{\rho-1}} C_{t2}^{\frac{\rho-\alpha\rho}{\rho-1}} &\quad (8)
 \end{aligned}$$

Supongamos, ahora:

$$Y_i = Y_i^S = \bar{Y}_i \quad i = 1, 2 \quad (\text{IV})$$

$$r_i = r_i^* \quad (\text{V})$$

En tal caso, el modelo del período 1 se puede expresar así:

$$Y_1 = Y_1^S = \bar{Y} = Y_{t1} + P_{n1}Y_{n1}$$

$$Y_1^D = C_{t1} = P_{n1}C_{n1},$$

$$X_1 = Y_{t1} - C_{t1};$$

$$Y_{t1} = Y_1 - Y_{n1};$$

$$Y_{n1} = C_{n1}$$

$$C_{n1} \left[\left(\frac{1+d}{1+r_1} \right) \frac{P_{n2}}{P_{n1}} \right]^{1-\alpha\rho} C_{n2} C_{t2}^{\frac{\alpha\rho-\rho}{1-\alpha\rho}} C_{t1}^{\frac{\rho-\alpha\rho}{1-\alpha\rho}},$$

=>

$$\frac{\partial C_{n1}}{\partial r_1} < 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha\rho > 0;$$

$$\frac{\partial C_{n1}}{\partial P_{n2}} > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha\rho > 0;$$

$$\frac{\partial C_{n1}}{\partial P_{n1}} < 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha\rho > 0;$$

$$\frac{\partial C_{n1}}{\partial C_{n2}} = \frac{C_{n1}}{C_{n2}};$$

$$\frac{\partial C_{n1}}{\partial C_{t2}} < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\rho - \rho}{1 - \alpha\rho} < 0;$$

$$C_{t1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} P_{n1} C_{n1} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial C_{t1}}{\partial P_{n1}} > 0, \frac{\partial C_{t1}}{\partial C_{n1}} > 0;$$

$$r_1 = r_1^*$$

Por tanto, dados unos parámetros, unos valores pasados y unas expectativas sobre valores futuros el modelo del período 1 se puede resumir así:

$$Y = Y^S = Y_t + P_n Y_n$$

$$E = C_t + P_n C_n$$

$$C_t = C_t(P_n, C_n)$$

$$C_n = C_n(r, P_n) = Y_n$$

$$Y_t = Y - Y_n$$

$$X = Y_t - C_t = \frac{A_2 - X_2}{1+r} - A_0(1+r_0)$$

$$r = r^*$$

Es decir:

$$Y = Y^S$$

$$Y^D = E(P_n, r) + X(P_n), E_{P_n} < 0, E_r < 0,$$

$$\text{para } 1 - \alpha\rho < 0; X_{P_n} < 0$$

$$r = r^*$$

$$\text{Sujeto a: } X = \frac{A_2 - X_2}{1+r} - A_0(1+r_0)$$

$$A_2 \geq 0$$

Por tanto, se demuestra que el modelo IS-BP puede considerarse como una versión del modelo de optimización intertemporal para el período presente cuando: a) están dados sus parámetros, valores iniciales y las expectativas sobre valores futuros, y b) cuando el patrimonio final (A2) absorbe las variaciones de X (puesto que esta última condición permite considerar de carácter permanente las variaciones de la tasa de cambio real).