
LA IMPRESIÓN DE BILLETES EN LA BANCA CENTRAL MODERNA: TENDENCIAS, COSTOS Y EFICIENCIA*

En este documento se estudian las tendencias en la producción de billetes entre los años 2000 a 2005 a partir de una muestra de 56 bancos centrales. Se encontró que ante el elevado crecimiento de la demanda de efectivo en años recientes, los bancos centrales han implementado nuevas estrategias para ganar eficiencia en la producción de billetes, entre las que se destaca, la vinculación del sector privado por medio de distintas modalidades, como por ejemplo: asociaciones de riesgo compartido, creación de subsidiarias o compra de billetes a firmas especializadas.

*Por: Jorge Eduardo Galán Camacho
Miguel Sarmiento Paipilla***

La impresión de billetes es una función que tradicionalmente ha estado a cargo de los bancos centrales; sin embargo, con el desarrollo de los mercados financieros y la consolidación de firmas especializadas en la producción de billetes,

varios bancos centrales han vinculado al sector privado en el desempeño de esta función.

Uno de los aspectos que ha motivado estos cambios ha sido el alto crecimiento

* Este documento hace parte del programa de investigaciones sobre banca central que adelanta el Departamento de Planeación y Presupuesto con la asesoría de la Unidad de Investigaciones de la Gerencia Técnica. Una versión anterior fue presentada en el IV Curso internacional sobre gestión de efectivo, organizado por el Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos (Cemla), el Comité de Tesoreros y el Banco de la República, en Bogotá, D. C., del 10 al 14 de septiembre de 2007. Se agradecen los múltiples comentarios recibidos de los asistentes al evento, así como de Gerardo Hernández, Néstor Plazas, Javier Sepúlveda y Hernán Rincón, los cuales fueron de gran utilidad para mejorar el presente documento. Este trabajo contó con la valiosa asesoría técnica de Martha Misas y Ligia Melo, y la colaboración de Carolina Moreno como asistente de investigación.

** Los autores son economistas del Departamento de Planeación y Presupuesto del Banco de la República. Las opiniones, errores u omisiones son de su exclusiva responsabilidad y no reflejan la posición del Banco de la República ni la de su Junta Directiva.

de la demanda de efectivo durante estos años. De hecho, el crecimiento promedio del volumen de billetes en circulación durante 2000 a 2005 fue de 26,5% en los 56 países estudiados (Anexo I)¹. Esto ha generado, entre otros efectos, un incremento en la producción de billetes y, por tanto, en sus costos. Con esto, los bancos centrales han implementado diversas estrategias con el fin de incrementar la eficiencia en la producción y suministro de billetes a la economía². Algunas de las estrategias implementadas son: la creación de empresas subsidiarias (e. g. Australia y Bulgaria), la cesión de la función al sector privado (e. g. Inglaterra y Suecia) y la integración en un solo complejo de las actividades de impresión y distribución de efectivo (e. g. Portugal y Colombia).

Estas modalidades fueron estudiadas inicialmente por el Banco de la República (2005) para una muestra de 133 bancos centrales, donde se encontró que entre 1993 y 2003 se presentó una tendencia hacia la cesión parcial o total de la producción de billetes, principalmente en los bancos centrales de economías avanzadas. Desde el banco central de Japón Nishihara (2006) encontró que los cambios en la modalidad de impresión de billetes en los bancos centrales del *Executives' Meeting of East Asia – Pacific* (Emeap) dependen de la relación con el Gobierno, el sector financiero y las compañías, así como de la estrategia de modernización adoptada por cada banco central³. Recientemente, Galán y Sarmiento (2007), empleando un modelo de datos de panel para 68 bancos centrales durante 2000 a 2004,

Con el objetivo de examinar los efectos de estas estrategias y de otras características de la impresión de billetes sobre los costos de producción, se estimó una función de costos con un modelo de datos de panel con efectos aleatorios, donde se encontró que la estructura de denominación, el tamaño de los billetes y la modalidad empleada por los bancos centrales, son variables que influyen sobre los costos de manera significativa. A su vez, se identificó que la impresión a cargo del Gobierno es la modalidad más costosa; mientras que la vinculación del sector privado al proceso de producción disminuye los costos de forma importante.

¹ Algunos estudios sugieren que el incremento reciente de los agregados monetarios obedece a la reducción de la inflación y de las tasas de interés nominales, así como a un crecimiento del ingreso real (véase, Hernández *et al.*, 2005; De Gregorio, 2003).

² En Baxter *et al.* (2005) se estudian las modalidades para la distribución del efectivo en los bancos centrales de Australia, Canadá, Inglaterra, Malasia y Noruega.

³ Los bancos centrales que conforman el EMEAP son los de: Australia, China, Hong Kong SAR, Indonesia, Japón, Corea, Malasia, Nueva Zelanda, Filipinas, Singapur y Tailandia.

encontraron que la función de impresión de billetes es un determinante importante de la demanda laboral de los bancos centrales. A su vez, identificaron que el cambio de estrategia en la realización de esta función tiene importantes efectos en términos de la planta de personal⁴.

Si bien los trabajos mencionados dan luces sobre las recientes estrategias de modernización empleadas por los bancos centrales para ganar eficiencia en la producción de billetes, es importante considerar otros aspectos asociados con el desempeño de esta función, tales como la estructura de denominación en cada país, las características de los billetes y los costos de producción. Estos elementos son tratados a profundidad en el presente estudio, identificando las variables que determinan los costos de impresión de billetes y el efecto de los cambios en las modalidades de producción sobre los costos y la eficiencia.

Para los anteriores objetivos, el presente documento se divide en cuatro secciones, incluida esta introducción. En la segunda se estudian las tendencias, la estructura de denominación y las características de los billetes de 56 bancos centrales durante el período 2000 a 2005. En la siguiente, se construye un conjunto de indicadores comparativos de los costos de producción y se estima una función de costos por medio de un modelo de datos de panel, con el fin de identificar

los principales determinantes de los costos de producción. Así mismo, se emplea un modelo no paramétrico de frontera eficiente para examinar el nivel de eficiencia técnica de los bancos centrales en la producción de billetes, así como para identificar su cambio en productividad mediante el cálculo del índice de Malmquist. Las principales conclusiones se presentan en la cuarta sección.

I. TENDENCIAS EN LA IMPRESIÓN DE BILLETES

A. Modalidades

En años recientes, los bancos centrales han implementado diversas modalidades para la producción de billetes, entre las más usadas se destacan: la impresión directa por parte del banco central, la producción por medio de una empresa subsidiaria, la compra a proveedores internos (empresas privadas locales y Gobierno) y la importación. En el Cuadro 1 se observa la importancia relativa de estas modalidades en el año 2005. Para la comparación, los bancos centrales se clasificaron en cuatro grupos, así: zona euro, otras economías avanzadas, Latinoamérica, y otros países en desarrollo.

Allí se aprecia que en la mayoría de los países de la zona euro y del grupo de otros países en desarrollo la producción de billetes es realizada por el banco central; sin

⁴ Entre los estudios de caso, se destacan para los Estados Unidos el trabajo de Booth (1989) y Lacker (1993). Por su parte, Daltung y Ericson (2004) analizan la reciente estrategia implementada por el banco central de Suecia para la impresión de billetes y el manejo del efectivo.

Cuadro 1
Modalidades de los bancos centrales
para la producción de billetes, 2005

Modalidad	Zona del euro		Otras economías avanzadas		Latinoamérica		Otros países en desarrollo	
	País (12)	Porcentaje	País (14)	Porcentaje	País (14)	Porcentaje	País (16)	Porcentaje
Banco central	Bélgica Francia Grecia Irlanda Italia	41,7%	Dinamarca Hong Kong Noruega	21,4%	Colombia México Venezuela	21,4%	Albania Armenia Bangladesh Eslovenia Rumania Tailandia Turquía	43,8%
Empresa privada	Alemania Finlandia Holanda	25,0%	Canadá Inglaterra Suecia	21,4%		0,0%	Polonia	6,3%
Gobierno	España	8,3%	Corea Estados Unidos Japón	21,4%	Argentina Brasil Chile	21,4%	Rep. Checa	6,3%
Subsidiaria	Austria Portugal ^a	16,7%	Australia	7,1%		0,0%	Bulgaria Hungria	12,5%
Importa	Luxemburgo	8,3%	Chipre Islandia Israel Nueva Zelanda	28,6%	Bolivia Costa Rica Guatemala Nicaragua Paraguay Perú Rep. Dominicana Uruguay	57,1%	Bosnia Croacia Eslovaquia Estonia Malasia	31,3%

a/ Desde 1999 en Portugal la figura es la de una asociación de riesgo compartido con De La Rue.
Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), y cálculos de los autores.

embargo, los bancos centrales que desempeñan esta función representan menos de la mitad de la muestra analizada. Se aprecia, también, que la compra de billetes a empresas privadas es más utilizada en los bancos centrales de economías avanzadas y de la zona del euro, que en otras regiones. Por su parte, la creación de empresas

subsidiarias de los bancos centrales es una modalidad que no se utiliza en Latinoamérica, pues más de la mitad de los países estudiados importa sus billetes.

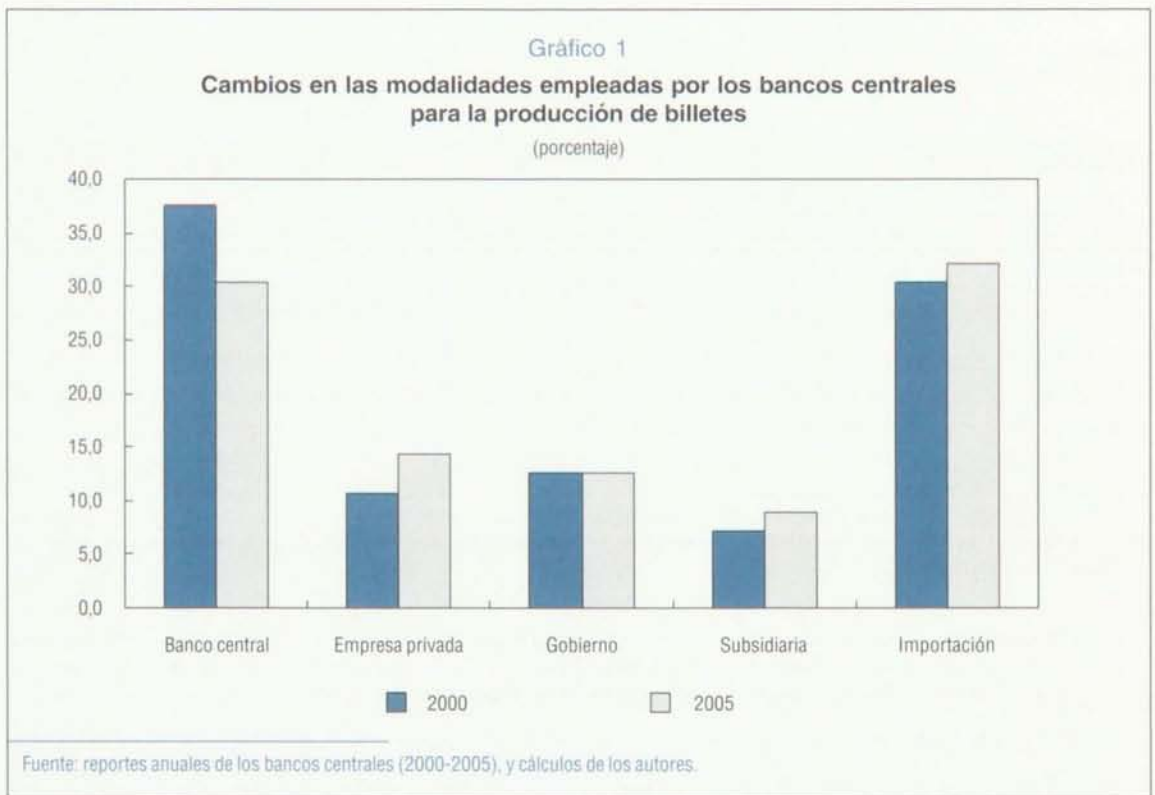
En cuanto a la importación de billetes, es preciso mencionar que la mayoría de los bancos centrales acude a más de un

proveedor⁵. En el Gráfico 1 se muestra la tendencia de estas modalidades durante el período 2000 a 2005, cuando se aprecia una reducción en el número de bancos centrales impresores y un aumento de la participación de la empresa privada y de la importación. Esta tendencia refleja la búsqueda permanente de estrategias de modernización para la producción de billetes, que se fundamenta, en gran medida, en la participación activa de terceros.

Los bancos centrales que cambiaron de modalidad durante el período fueron los

de Bulgaria y Croacia, en el grupo de otros países en desarrollo, y los de Suecia e Inglaterra, en el grupo de otras economías avanzadas. En el caso del banco central de Bulgaria la estrategia consistió en constituir su departamento de impresión de billetes como una entidad legal independiente (denominada como *Printing Works*) bajo la figura de subsidiaria del banco central, la cual comenzó a operar en enero de 2002⁶.

En el mismo año, el banco central de Croacia dejó de producir directamente



⁵ Por ejemplo, el banco central de Eslovaquia tiene diferentes proveedores según la denominación de sus billetes, entre ellos la empresa británica De La Rue International Limited (De La Rue) y la empresa canadiense Giesecke & Devrient GmbH (G&D). Igualmente, el banco central de Bosnia importa billetes de dos empresas: Oesterreichische Banknoten und Sicherheitsdruck (OeBS) de Austria y la empresa francesa François Charles Oberthur Fiduciaire (FCO).

⁶ De esta forma, el banco central de Bulgaria asumió el 100% de la participación en las acciones de la empresa, adquiriendo la facultad de gobernar las políticas financieras y operacionales de la misma y de obtener los beneficios

los billetes y empezó a importarlos, comprando inicialmente a OeBS, la empresa subsidiaria del banco central de Austria desde 1998.

La estrategia empleada por los bancos centrales de Inglaterra y Suecia fue vender sus imprentas de billetes a empresas privadas. En marzo de 2003 el banco central de Inglaterra vendió su imprenta de billetes a De La Rue, con el fin de lograr sus objetivos en términos de costos y de seguridad en los billetes ofrecidos⁷. Desde un enfoque similar el banco central de Suecia vendió en 2001 su imprenta de billetes a la compañía estadounidense Crane & Co, Inc., con el fin de concentrarse en sus funciones objetivo⁸. De igual forma, en 2003, el Banco Central de Noruega decidió dejar de producir sus billetes con recursos propios a partir de 2007 (Norges Bank, 2003)⁹.

La cesión de la producción de billetes por parte de los bancos centrales a otros agentes no ha sido la única estrategia

utilizada para mejorar la eficiencia en esta actividad. En 1995 el banco central de Portugal construyó el complejo Carregado para integrar la distribución de efectivo y la producción de billetes. Desde 1999 allí la impresión de billetes es realizada por De La Rue, por medio de una asociación de riesgo compartido. A partir de 2006 el banco central de Colombia comenzó a operar la Central de Efectivo, un complejo donde se integran las actividades de producción de billetes y distribución del efectivo.

Otra estrategia fue la adoptada por los bancos centrales de la zona del euro, quienes desde el año 2002 realizan la producción de billetes de forma agregada y descentralizada. De esta forma, cada banco central nacional es responsable de la producción de una parte del total de billetes, en un número reducido de denominaciones. En este proceso cada banco central puede emplear una modalidad particular para la producción de los billetes¹⁰.

de sus actividades. A partir de 2004 el Gobierno empezó a tener también participación accionaria en la empresa. Cabe mencionar que, aunque la actividad principal de la empresa subsidiaria es la producción de billetes, también se ha encargado de producir algunos papeles o documentos para el Ministerio de Finanzas de Bulgaria y otras entidades gubernamentales (véase "Bulgarian National Bank", *Annual Report*, 2002 y 2004).

⁷ Inicialmente el banco central transfirió el capital y el personal relacionado con la producción de billetes a su empresa subsidiaria Deben Security Printing Ltd., la cual luego fue vendida a De La Rue. El acuerdo inicial estipuló que De La Rue le vendería billetes al banco central por siete años (véase *Bank of England*, 2003).

⁸ Esta decisión se dio luego de considerar que la empresa estadounidense podría desarrollar mayores habilidades técnicas en la imprenta, que en ese momento pertenecía al banco central (Tumba Bruk's Banknote Printing Works) y, a su vez, proporcionar el volumen de producción necesario para alcanzar beneficios de largo plazo (véase *Sveriges Riksbank*, 2002; Daltung y Ericson, 2004).

⁹ En diciembre de 2006 el banco central de Noruega contrató con De La Rue y con FCO la adquisición de billetes para el período 2007-2012 (véase *Norges Bank*, 2006).

¹⁰ Sin embargo, el Banco Central Europeo (BCE) planea para 2012 poner en marcha un procedimiento único de licitación para la producción de billetes del eurosistema, esto con el fin de que exista un solo oferente o muy pocos que los impriman de la forma más eficiente para la región (véase BCE, *Annual Report*, 2002) Para detalles sobre el papel que asumieron los bancos centrales nacionales luego de la creación del BCE puede consultarse Wellink *et al.* (2002).

B. Estructura de denominación

Los bancos centrales deben definir la estructura de denominación en circulación independientemente de la modalidad de impresión empleada, para lo cual necesitan estimar la participación de cada denominación en

el total de piezas demandadas por la economía, e introducir una nueva denominación cuando el mercado lo requiera. Por tanto, la elaboración de un plan de producción de billetes requiere de un análisis de las necesidades de producción para cada denominación, involucrando principalmente tres factores: la variación en la cantidad de billetes demandada por el público, la reposición de los deteriorados y las necesidades de inventario para cubrir eventos no esperados.

Cada uno de estos factores difiere entre denominaciones. La reposición de los billetes deteriorados es más frecuente en las bajas denominaciones, pues al ser usados en un mayor número de transacciones presentan una vida útil inferior a las demás.

Por su parte, la variación de las unidades requeridas para un año corriente y las

necesidades de inventario dependen del comportamiento de las preferencias del público por cada una de las denominaciones. A su vez, la cantidad de denominaciones vigentes en cada país es producto de un conjunto de circunstancias económicas que condicionan la demanda del efectivo.

Para evidenciar esta situación, en el Cuadro 2 se observa que los países de economías desarrolladas tienden a utilizar menos denominaciones que los países emergentes, aunque una proporción significativa de la muestra utiliza una estructura que varía entre cinco y siete (véase el Anexo 2).

La elaboración de un plan de producción de billetes requiere de un análisis de las necesidades de producción para cada denominación, involucrando principalmente tres factores: la variación en la cantidad de billetes demandada por el público, la reposición de los deteriorados y las necesidades de inventario para cubrir eventos no esperados.

En las economías con alto grado de desarrollo tecnológico en materia de medios de pago y distribución de efectivo, y con modelos avanzados de distribución de bienes y servicios (e. g. grandes cadenas de almacenes, integración de las redes de pago electrónicas con el comercio, entre otros), puede esperarse que la dinámica del efectivo y la composición del circulante sean más estables (Misas *et al.*, 2004). A esto se suma el hecho de que las instituciones financieras pueden influir de manera significativa en la demanda de efectivo¹¹.

¹¹ Aquéllas pueden influir, ya que, por lo general, presentan sesgos en favor de las altas denominaciones y en contra de la moneda metálica para los retiros de efectivo en los cajeros electrónicos, los cuales se constituyen en uno de los principales medios de su distribución de billetes.

Cuadro 2
Estructura de denominación de los billetes en circulación, 2005

Estructura de denominación	Zona del euro		Otras economías avanzadas		Latinoamérica		Otros países en desarrollo	
	País (12)	Porcentaje	País (14)	Porcentaje	País (14)	Porcentaje	País (16)	Porcentaje
Menor a cinco denominaciones			Chipre Corea Inglaterra Israel Japón	35,71%	Costa Rica	7,14%		
Cinco denominaciones			Australia Canadá Dinamarca Noruega Nueva Zelanda	35,71%	Nicaragua Paraguay Perú	21,43%	Albania Polonia Tailandia	18,8%
Seis denominaciones			Hong Kong	7,14%	Argentina Chile Colombia México Venezuela	35,71%	Armenia Malasia Rumanía Turquía	25,0%
Siete denominaciones	Alemania Austria Bélgica España Francia Finlandia Grecia Holanda Irlanda Italia Luxemburgo Portugal	100%	Estados Unidos Islandia Suecia	21,43%	Bolivia Brasil Guatemala Rep. Dominicana	28,57%	Bulgaria Eslovaquia Hungria	18,8%
Mayor a siete denominaciones					Uruguay	7,14%	Bangladesh Bosnia Croacia Eslovenia Estonia Rep. Checa	37,5%

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), Cemla (2005), páginas electrónicas de los bancos centrales, y cálculos de los autores.

Por otra parte, en los países en desarrollo se presenta inestabilidad en la demanda de efectivo, lo cual influye sobre su

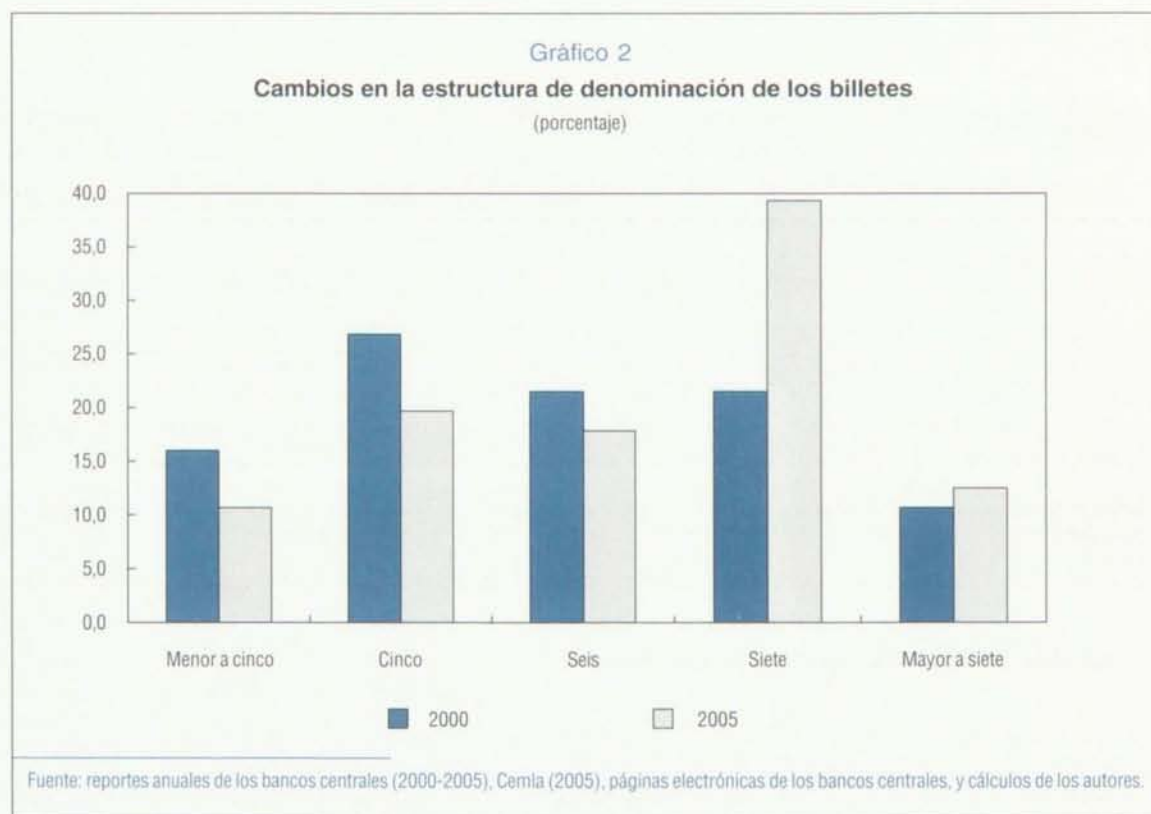
producción. En períodos de alta inflación el poder adquisitivo de las denominaciones vigentes se reduce y hace necesaria

la introducción de una denominación que se ajuste a las condiciones del mercado. En otras palabras, el aumento en el valor nominal de las transacciones diarias en la economía, ya sea por inflación o por un mayor crecimiento económico, se entiende como una señal para introducir una nueva denominación¹².

En el Gráfico 2 se presentan los cambios en la estructura de denominación para los bancos centrales estudiados, donde se observa una tendencia a incrementar el número de denominaciones. Entre

2000 y 2005 se redujo el porcentaje de países que utilizaba seis denominaciones o menos, y se incrementó la proporción de bancos centrales que emiten siete o más denominaciones. Los cambios más representativos se dieron en la zona del euro (con la adopción de la moneda única), en Latinoamérica y en el grupo de otros países en desarrollo (Anexo 2).

Para estos cambios existen diferentes motivos, por ejemplo, en algunos países (*e. g.* Uruguay, Armenia y Hungría) en períodos cuando se introdujeron las nuevas



¹² Este resultado aplica para los países que utilizan el sistema métrico-D, desarrollado por L. C. Payne y H. L. Morgan con el fin de estimar la cantidad de billetes para producir por denominación y la estructura que debe predominar. El modelo relaciona la remuneración promedio diaria de la economía con las denominaciones de billetes y monedas que deben emitirse (para detalles sobre los recientes modelos para la emisión de efectivo véase Mushin, 1998).

denominaciones coinciden con momentos de alta inflación. En Colombia¹³ los cambios obedecieron tanto al comportamiento de la inflación, como a un mecanismo para contrarrestar la falsificación, y en Rumania la inclusión de una denominación adicional fue producto de una redenominación de los billetes que entró en vigencia a partir de 2005.

El aumento en el valor nominal de las transacciones diarias en la economía, ya sea por inflación o por un mayor crecimiento económico, se entiende como una señal para introducir una nueva denominación.

C. Características de los billetes

1. Seguridad

La inclusión de elementos de seguridad en la fabricación de billetes es un mecanismo utilizado por los bancos centrales para prevenir su falsificación. El reto es utilizar características de seguridad que vayan a la vanguardia con los avances tecnológicos en materia de impresión, copiado y grabado. Existe una amplia gama de características de seguridad utilizadas en los billetes; algunas implícitas en el proceso de manufactura (e. g. grosor, textura, incrustaciones, etc.), y otras, como el uso de tintas especiales, símbolos, imágenes, números de serie, etcétera, que se desarrollan en el proceso de impresión de los billetes. De la misma manera, el material utilizado para

su fabricación puede determinar ciertas características de seguridad, así como su vida útil. Usualmente se emplea el papel de algodón, sin embargo, algunos países emiten billetes en sustrato plástico o polímero¹⁴. En el Cuadro 3 se muestra la proporción de países que utilizan los elementos de seguridad más comunes y los que imprimen sus billetes en polímero (Anexo 3).

En general, la marca de agua y el hilo de seguridad son las características de seguridad más empleadas, ya que usualmente vienen impresas en el material de fabricación del billete, siendo más comunes cuando se utiliza el papel de algodón. En cuanto al hilo de seguridad, existen varias singularidades: puede usarse normal, aventanillado u holográfico. Otras características ampliamente usadas son la impresión en alto relieve, la microimpresión y la imagen oculta. En contraste, el registro perfecto es menos utilizado en el grupo de otras economías avanzadas, y la tinta que cambia de color es poco usada en Latinoamérica.

Por otra parte, la observación bajo luz ultravioleta y los hologramas son características de seguridad menos comunes

¹³ Durante este período el Banco de la República emitió el billete de \$50.000 debido al comportamiento de la inflación, y el de \$1.000 para disuadir la falsificación de la moneda con la misma denominación.

¹⁴ En este caso algunas combinaciones se han utilizado, como lo hizo Bulgaria al emitir un billete híbrido papel-polímero en 2005, el cual se encuentra en período de prueba.

Cuadro 3
Utilización de las características de seguridad más comunes
en la impresión de billetes y uso del polímero, 2005 ^{a/}

(porcentaje)

Característica	Zona del euro Países (12)	Otras economías avanzadas Países (14)	Latinoamérica Países (14)	Otros países en desarrollo Países (16)
Marca de agua	100,0	85,7	100,0	92,3
Hilo de seguridad	100,0	78,6	100,0	92,3
Impresión en alto relieve	100,0	78,6	100,0	84,6
Microimpresión	100,0	85,7	90,0	100,0
Imagen oculta	100,0	71,4	90,0	92,3
Registro perfecto	100,0	57,1	90,0	92,3
Tinta que cambia de color	100,0	78,6	60,0	100,0
Observación bajo luz ultravioleta	100,0	85,7	50,0	69,2
Holograma (elementos de contraste)	100,0	64,3	50,0	53,6
Número de características promedio	9,0	6,7	7,1	7,4
Billetes de polímero	0,0	21,4	21,4	18,8

Nota: La información corresponde a los elementos de seguridad usados por los bancos centrales en al menos una denominación durante 2005. Las características de seguridad pueden variar entre denominaciones.

a/ En el Anexo 3 se explica la definición de cada una de las características de seguridad.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), páginas electrónicas de los bancos centrales, y cálculos de los autores.

y utilizadas principalmente en economías avanzadas¹⁵. En el uso del holograma existen varias modalidades para su implementación: por ejemplo, en Bulgaria, Canadá y Hungría se utilizan bandas holográficas; en Dinamarca, Inglaterra y Japón se emplean parches holográficos; mientras que los billetes de euro utilizan ambos tipos de holograma, el primero para bajas denominaciones y el segundo para altas denominaciones.

En cuanto al número de características utilizadas, la mayoría de los países aplica

entre siete y ocho en promedio, aunque esto varía según las denominaciones¹⁶. Únicamente cinco bancos centrales utilizan menos de seis características de seguridad; mientras que un grupo importante de países, incluyendo aquellos que usan el euro, utilizan más de diez. En ambos grupos se involucran elementos menos comunes, tales como: microperforaciones (e. g. zona del euro y Rumania), fondos de seguridad (e. g. Guatemala), *kinegram* (e. g. Eslovaquia), fibras de seguridad invisibles e impresiones con sellos y tinta infrarroja (e. g. Albania), y marcas de agua

¹⁵ En cuanto a la observación bajo luz ultravioleta, la mayoría de los bancos centrales que la utilizan, imprimen sus billetes en papel no fluorescente que se torna opaco al exponerlo bajo este tipo de luz. Los elementos más comunes para esta observación son los números de serie, los hilos de seguridad, textos especiales y fibrillas. Los Estados Unidos se destacan por no utilizar tinta fluorescente en el proceso de impresión; sin embargo, se considera que los colores del fondo de los billetes son claves para disuadir la falsificación.

¹⁶ En general, las denominaciones más altas contienen mayor número de características de seguridad: por ejemplo, en Rumania la menor denominación sólo tiene tres, mientras que la mayor presenta diez.

acentuadas y tridimensionales (e. g. Uruguay)¹⁷. En síntesis, los bancos centrales combinan las características de seguridad de diferentes maneras y no todos utilizan la gama expuesta.

Por último, se identifica una tendencia hacia la adopción de polímero, principalmente en billetes de baja denominación, que son aquellos que presentan una vida más corta. Algunos de los nuevos países que emitieron billetes en polímero durante el período fueron Brasil en 2000, México en 2002 y Chile en 2004.

2. Tamaño

A diferencia de las características de seguridad, lo cual obedece más a una decisión en materia de disuasión de la falsificación, el tamaño de los billetes es un aspecto del proceso de producción que el banco central puede controlar para reducir los recursos de producción (e. g. papel, tinta). En muchos casos el tamaño varía con las denominaciones: por ejemplo, el banco

central de Dinamarca estableció que todos sus billetes deben ser producidos con la misma altura, pero con una diferencia de 10 mm entre cada denominación para facilitar no sólo el proceso de clasificación y conteo sino también la identificación de las denominaciones por parte de las personas invidentes. Este último propósito sirvió de justificación para que los billetes de euro se diseñaran con tamaños que varían conforme aumenta la denominación, al igual que sucede en Inglaterra con la libra esterlina y a partir de 2006 con el peso en México¹⁸.

Sin embargo, también existen razones en términos de costos con respecto al tamaño, pues un billete más grande requiere la utilización de mayor cantidad de materiales y recursos. Por ejemplo, puede emplearse una mayor cantidad de pliegos de papel que, a su vez, se traduce en un mayor tiempo de fabricación y verificación de una misma cantidad de billetes.

En general, la marca de agua y el hilo de seguridad son las características de seguridad más empleadas, ya que usualmente vienen impresas en el material de fabricación del billete, siendo más comunes cuando se utiliza el papel de algodón. Otras características ampliamente usadas son la impresión en alto relieve, la microimpresión y la imagen oculta. En contraste, el registro perfecto es menos utilizado en el grupo de otras economías avanzadas, y la tinta que cambia de color es poco usada en Latinoamérica.

¹⁷ El fondo de seguridad consiste en una impresión plana en el fondo del billete con diseños finos que forman figuras de alta complejidad. Por otra parte, las microperforaciones son pequeños orificios que atraviesan el billete y que, en su conjunto, forman una figura al observarse contra la luz. El *kinegram* consiste en una lámina metálica en forma de medialuna que permite formar imágenes que cambian con el ángulo de la luz.

¹⁸ México planea entre 2006 y 2010 tener en circulación la totalidad de la nueva familia de billetes con diferenciación de tamaño.

En el Cuadro 4 se compara el área promedio de los billetes en circulación para el grupo de bancos centrales, donde se observa que los países de economías avanzadas y de la zona del euro presentan el mayor tamaño promedio de los billetes, mientras que los de menor tamaño circulan en Latinoamérica, seguidos de cerca por la región de otros países en desarrollo. No obstante, este último grupo presenta la mayor dispersión, dado que se encuentran los países con

el menor y con el mayor tamaño de billetes de toda la muestra (Polonia con 87,48 cm² y Turquía con 123,17cm²).

Una estrategia para reducir los costos ha sido producir billetes de menor tamaño en las denominaciones más bajas, debido a su menor vida útil. Por ejemplo, en Colombia el banco central decidió en 2006 reducir el tamaño de las dos denominaciones más bajas, con el objetivo de disminuir sus costos de producción¹⁹.

Cuadro 4
Tamaño de los billetes en circulación, 2005

Zona del euro		Otras economías avanzadas		Latinoamérica		Otros países en desarrollo	
Pais	Área (cm ²)	Pais	Área (cm ²)	Pais	Área (cm ²)	Pais	Área (cm ²)
Austria		Australia	93,6	Brasil	91,0	Polonia	87,5
Bélgica		Nueva Zelanda	93,6	Perú	91,0	Bulgaria	89,2
Francia		Israel	98,0	México	96,6	Malasia	91,9
Finlandia		Islandia	100,5	Colombia	98,0	Croacia	92,1
Alemania		Noruega	101,6	Venezuela	98,5	Bosnia	94,6
Grecia		Estados Unidos	103,4	Rep. Dominicana	99,2	Estonia	96,6
Holanda		Dinamarca	104,4	Nicaragua	100,5	Albania	100,7
Irlanda	105,58	Canadá	106,5	Argentina	100,8	Rumania	101,5
Italia		Suecia	106,5	Guatemala	101,3	Eslovenia	101,7
Luxemburgo		Chipre	112,9	Chile	101,5	Hungría	103,5
Portugal		Inglaterra	113,2	Bolivia	102,2	Rep. Checa	104,2
España		Hong Kong	117,3	Uruguay	102,3	Bangladesh	104,5
		Japón	117,8	Costa Rica	102,3	Armenia	106,1
		Corea	118,6	Paraguay	105,2	Tailandia	108,0
						Eslovaquia	108,5
						Turquia	123,2
Promedio	105,58	Promedio	106,3	Promedio	99,3	Promedio	100,9

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), páginas electrónicas de los bancos centrales, y cálculos de los autores.

¹⁹ La reducción de las denominaciones más bajas (\$1.000 y \$2.000) significó pasar de billetes con tamaño de 140 mm x 70 mm a 130 mm x 65 mm, lo que implica una reducción del 14% en su área. Esta decisión permitirá disminuciones en los costos de producción de estas denominaciones, cercanas al 15% y 20%, respectivamente.

II. COSTOS DE IMPRESIÓN, FUNCIÓN DE COSTOS Y EFICIENCIA

A. Análisis comparativo de costos

En esta sección se realiza un análisis comparativo de los costos de la impresión de billetes de 28 bancos centrales, para los cuales se obtuvo información detallada. Los costos de impresión hacen referencia a lo que efectivamente le cuesta al banco central producir o abastecerse de billetes, según la modalidad empleada²⁰.

Para la comparación de costos entre bancos centrales es necesario tener presente dos aspectos. El primero de ellos está en que los datos de costos para un mismo banco central presentan diferencias importantes entre un año y otro, debido a diversos factores que alteran la composición en la producción durante el año. Por ejemplo, existen períodos cuando la producción de billetes es muy reducida, pues el inventario disponible es suficiente para abastecer las necesidades de producción, y épocas cuando se requiere producir grandes cantidades como consecuencia de su deterioro o falsificación. Por estas razones los datos de costos se

analizan como promedio del período 2000 a 2005.

El segundo aspecto radica en que los costos también presentan amplias diferencias entre bancos centrales, pues las cantidades de billetes producidos son muy diferentes dependiendo de las características del país y de su economía. Por ejemplo, mientras que el banco central de Eslovenia presenta costos de US\$0,5 millones al año, en Japón esta cifra asciende a US\$586 millones anuales (Anexo 4). Esto hace necesario construir indicadores que permitan comparar los costos en términos de variables como la población del país y el efectivo en circulación²¹.

1. Costos de impresión y efectivo en circulación

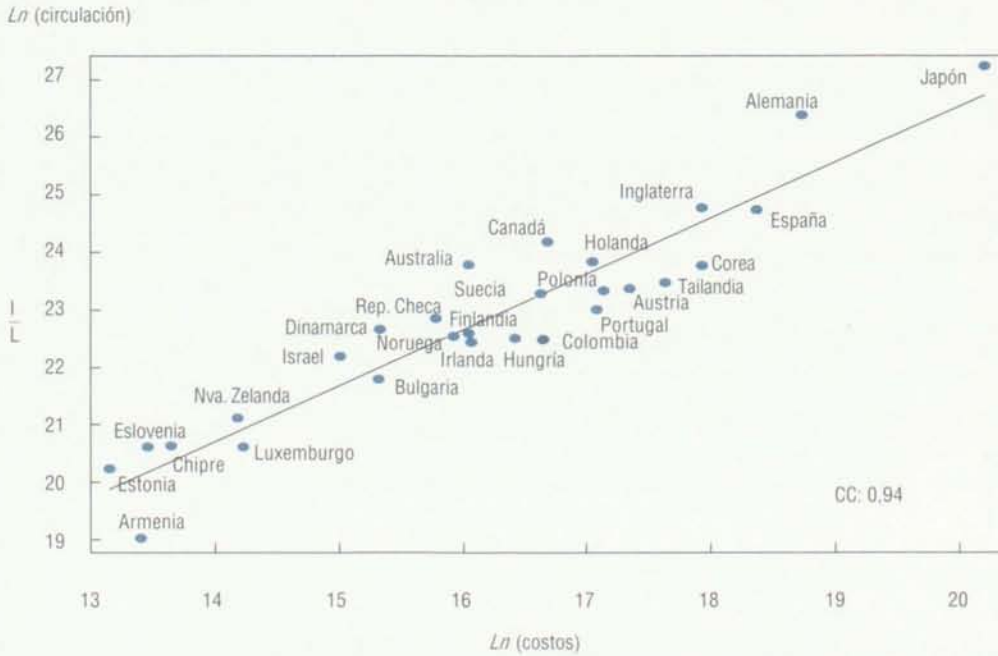
El nivel de efectivo en circulación es una medida muy cercana de la cantidad de billetes que debe producir un banco central para suplir las necesidades de la economía. De hecho, entre mayor sea la cantidad de efectivo en circulación, mayor será la cantidad de billetes que debe producirse y, por tanto, más grandes serán los costos —esto se comprueba mediante el alto coeficiente de correlación de las series en el Gráfico 3—.

²⁰ Cuando el banco central compra la producción a una empresa privada, dicho valor incluye la rentabilidad financiera para dicha empresa; mientras que cuando el Gobierno es el encargado de la producción, usualmente los bancos centrales reconocen únicamente los costos de producción, o parte de ellos. Cuando el banco central produce los billetes el costo incluye materiales de producción, depreciaciones de la maquinaria y costos del personal que interviene directamente en la producción. Para los bancos centrales de la zona del euro los datos de 2002 a 2005 corresponden a los costos de producción de las denominaciones asignadas por el Banco Central Europeo.

²¹ El indicador más preciso sería el costo por billete producido; sin embargo, sólo se logró obtener información detallada para once bancos centrales. En el Anexo 4 se muestra este indicador, así como dos indicadores adicionales: uno con relación al PIB y otro con relación a los costos operacionales del banco central.

Gráfico 3

Costo de producción de billetes y efectivo en circulación (2000-2005)



Nota: CC: coeficiente de correlación. Datos en logaritmos.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), y cálculos de los autores.

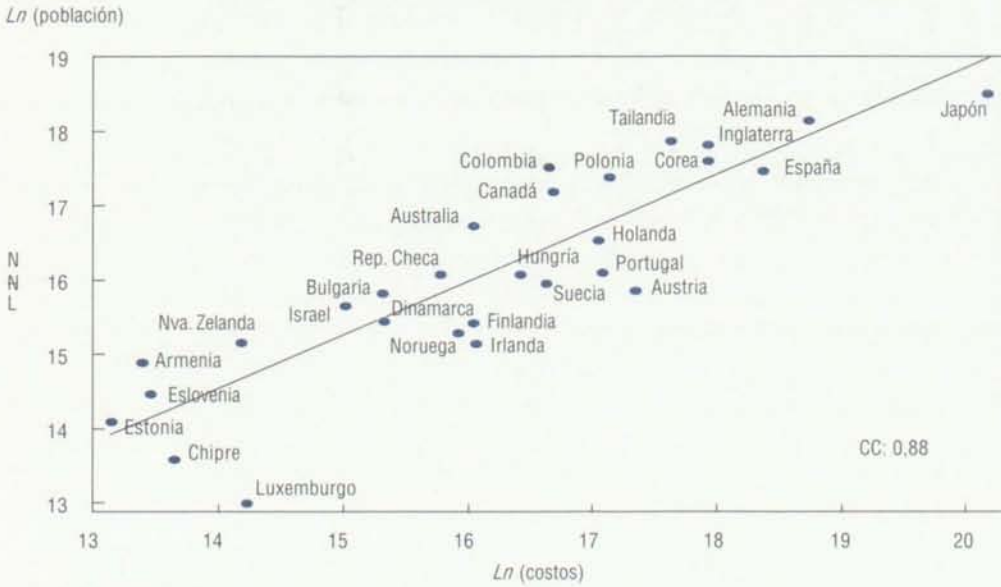
Los bancos centrales que se ubicaron por encima de la línea de regresión tienen comparativamente un menor costo, dado el volumen de efectivo en circulación. En este sentido, los bancos mejor ubicados son Alemania, Canadá y Australia. Por su parte, los que se ubican por debajo de la línea y más alejados de ésta son los bancos centrales de Armenia, Corea, Colombia y Tailandia.

2. Costos de impresión y población

La población del país es considerada como otra medida de la cantidad de billetes que requiere la economía. Con

este indicador se comparan los costos de impresión frente a la población que el banco central debe abastecer de billetes. En el Gráfico 4 se observa que los bancos centrales que se ubican por encima de la línea de regresión presentan costos comparativamente bajos, dada su población. Entre los países mejor ubicados se encuentran Colombia, Australia, Canadá y Armenia. Por su parte, entre los países que se ubican debajo de la línea de regresión se encuentran Japón, Luxemburgo y Austria. En el caso de Japón su banco central presenta costos cuatro veces mayores a los de Alemania, pero con una población sólo 1,5 veces mayor.

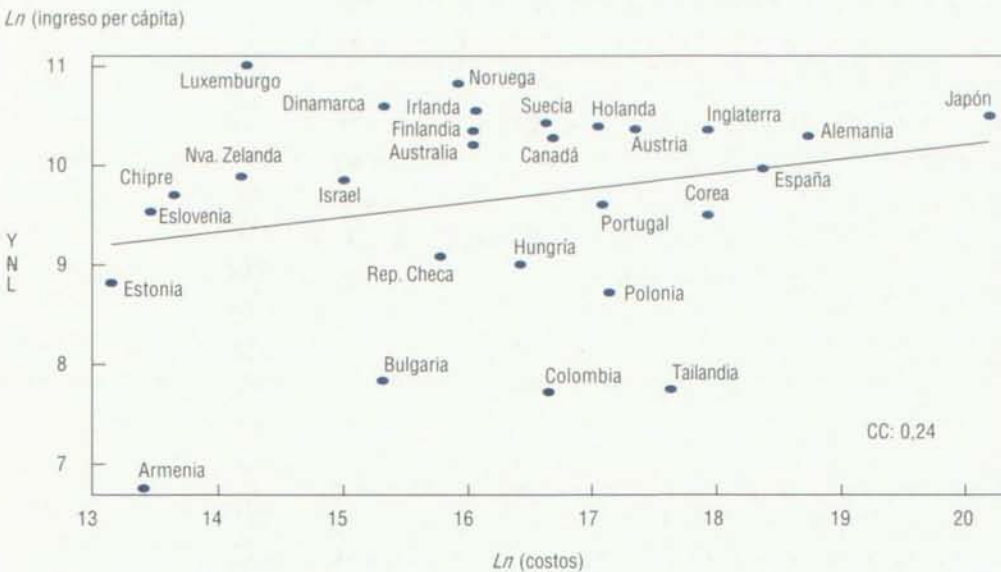
Gráfico 4
Costo de producción de billetes y población, 2000-2005



Nota: CC: coeficiente de correlación. Datos en logaritmos.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), Banco Mundial, y cálculos de los autores.

Gráfico 5
Costo de producción de billetes e ingreso per cápita, 2000-2005



Nota: CC: coeficiente de correlación. Datos en logaritmos.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), Banco Mundial, y cálculos de los autores.

B. Una función de costos para la impresión de billetes

Con el fin de sugerir estrategias que conduzcan a la reducción de los costos de impresión, e incrementar su eficiencia en el desempeño de esta función, es necesario identificar las variables que los determinan. Desde esta óptica se plantea una función de costos que se estima mediante un modelo de datos de panel con efectos dinámicos para 28 bancos centrales durante 2000 a 2005.

1. El modelo

La función de costos de impresión de billetes para los bancos centrales se asume como una ecuación tradicional tipo Cobb-Douglas, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$(1) \quad \ln C(y, w) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(Y) + \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \ln(w_i)$$

Donde (Y) representa la cantidad del bien final o servicio producido y (w) los precios de los i factores de producción. La utilización de una función Cobb-Douglas es apropiada para este ejercicio, ya que permite inferir directamente la elasticidad de las variables independientes. Para efectos de la estimación econométrica, esta función se puede expresar como una ecuación log-lineal, donde adicionalmente se involucran variables de tipo ambiental (z), las cuales influyen en los costos de producción y

que no son del control del banco central (véase Battese y Coelli, 1995). Debido a la no disponibilidad de información sobre precios de los insumos, y a que no se pretende estimar directamente medidas de eficiencia, se omite la variable (w), se emplea la siguiente función de costos de corto plazo:

$$(2) \quad \ln(C_{it}) = \beta_0 + \beta_1 \times \ln(Y_{it}) + \sum_{j=1}^m \beta_j \times \ln(Z_{jit}) + u_{it}$$

A partir de la ecuación (2) se vinculan variables que reflejan el nivel de producto, las características de la producción de billetes y la modalidad empleada por los bancos centrales. El modelo se describe por:

$$(3) \quad \begin{aligned} \ln(C_{it}) = & B_0 + B_1 \times \ln(N_{it}) + B_2 \times \\ & \ln(Circ_{it}) + B_3 \times \ln(Y_{it}) + B_4 \times \\ & \ln(Den_{it}) + B_5 \times \ln(Seg_{it}) + B_6 \times \\ & \ln(Tam_{it}) + B_7 \times Priv_{it} + B_8 \times Gob_{it} + u_{it} \end{aligned}$$

En la ecuación (3) los costos de producción de billetes para cada banco central (C) se encuentran en función de: la población del país (N); el dinero en circulación en la economía ($Circ$); el ingreso per cápita (Y); el número de denominaciones que se producen y circulan en la economía (Den); el número promedio de características de seguridad (Seg); el tamaño promedio de los billetes (Tam), y de la modalidad empleada por el banco

central para la impresión de billetes (*Priv* y *Gob*)²².

La variable (*Priv*) hace referencia a una modalidad donde se ha permitido la participación de terceros de carácter privado en el proceso de impresión. Esto incluye contratos de administración de riesgo compartido tipo *joint venture*, diversas modalidades de subsidiarias y la delegación total del proceso a empresas privadas, a las cuales el banco central compra la producción. Esta es una variable *dummy* que toma el valor de 1 en cualquiera de los casos anteriores y 0 en otro. Por su parte, la variable (*Gob*) también es una *dummy* que identifica específicamente la modalidad donde el gobierno es el encargado de la producción de los billetes y, por tanto, toma el valor de 1 en ese caso y 0 en otro²³.

La relación de las primeras dos variables explicativas (*N* y *Circ*) con los costos de impresión se corroboró mediante los indicadores construidos. En el modelo se introducen como *proxies* del nivel de producto que debe suministrar el banco central, y se espera signo positivo sobre ellas, ya que a mayor población del país, mayor es la cantidad de billetes que debe suministrar y, por ende, mayores

sus costos. Así mismo, si el volumen de efectivo en circulación en la economía es elevado, mayores son las necesidades de efectivo de dicho país y, por tanto, mayores los costos de producción.

El ingreso per cápita (*Y*) es una variable que pretende identificar en qué medida el nivel de desarrollo financiero de un país influye sobre los costos de producción. Esto debido a que, en general, las economías más desarrolladas presentan una mayor penetración del uso de medios de pago diferentes al efectivo (e. g. transacciones electrónicas o tarjetas). Con esto, se espera un signo negativo sobre esta variable²⁴.

El número de denominaciones (*Den*) también es, en alguna proporción, una medida del producto, pues el banco central debe suministrar billetes de todas las denominaciones existentes para circulación. Se espera un signo positivo sobre esta variable, pues al existir más denominaciones se hace necesario utilizar más tipos de planchas, papel, combinaciones de tintas y mayor uso de tiempo.

Por otra parte, las características de seguridad (*Seg*) y el tamaño de los billetes (*Tam*) son aspectos propios del producto

²² Es importante anotar que una característica del producto que podría influir sobre los costos es el uso de polímero; sin embargo, esta variable no pudo ser incluida en el modelo debido a que de la muestra de 28 bancos centrales únicamente tres utilizan este material (Australia, Nueva Zelanda y Tailandia), y de ellos sólo Tailandia presentó cambios durante el período estudiado. Esto no permite realizar una adecuada inferencia estadística sobre esta variable.

²³ En este caso la modalidad en que el banco central es el encargado de la producción de los billetes en su totalidad constituye el ejemplo base del modelo; es decir, se identifica porque en este caso las variables (*Priv*) y (*Gob*) toman el valor 0 de manera simultánea.

²⁴ Sobre esta situación hay importante evidencia en BCE (2007) y Bank of International Settlements (2007).

y definidos por el banco central. Sin embargo, en la primera de ellas dicha entidad ejerce un control indirecto, pues depende de factores como la falsificación, por lo que deberá introducir los niveles de seguridad necesarios para prevenirla. Para ambas variables se espera que se presenten signos positivos, pues tanto a mayores características de seguridad como a mayor tamaño de los billetes es necesario un mayor uso de materiales y factores de producción, los cuales incrementan los costos.

Por último, las variables (*Priv* y *Gob*) pretenden identificar si las modalidades utilizadas para la producción de billetes son determinantes de sus costos y cuál de ellas puede aportar más beneficios en términos de costos.

2. Metodología y resultados

Para estimar la ecuación (3) se empleó un modelo de panel de datos con efectos dinámicos, cuya expresión toma la siguiente forma:

$$(4) \quad y_{it} = X_{it}\beta + u_{it} \quad \text{con: } i = 1, \dots, 28 \\ \text{y } t = 2000, \dots, 2005.$$

La ecuación (4) representa el modelo tipo panel tradicional, donde Y_{it} es la variable dependiente que cambia para cada

banco central i durante cada período de tiempo t ; X_{it} hace referencia al conjunto de variables explicativas, y u_{it} representa el término de error, que a su vez se compone de la siguiente manera:

$$(5) \quad u_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it}$$

En la expresión (5) μ_i representa el efecto dinámico individual (fijo o aleatorio), y ε_{it} es el error de la observación²⁵. En la práctica, un estimador con efectos dinámicos asigna valores distintos a cada observación, lo que admite diferencias en los costos fijos entre bancos centrales²⁶. La estimación del modelo planteado en la ecuación (3) se realizó mediante el método de mínimos cuadrados generalizados (MCG), y con la condición de efectos aleatorios que resultó de la aplicación de la prueba de Hausman. El modelo planteado en la ecuación (3) muestra una buena especificación y una elevada *significancia* conjunta de las variables (Cuadro 5).

Los coeficientes de población y circulación resultaron positivos y significativos con un nivel de confianza de 99%, lo cual evidencia que son buenas aproximaciones del producto y que influyen sobre los costos positivamente. En cuanto a la variable de ingreso per cápita, su coeficiente resultó significativo y su signo negativo,

²⁵ La diferencia entre un modelo con efectos fijos y uno con efectos aleatorios radica en que este último aduce a una variable que cambia para cada individuo, mientras que en el primero el efecto es un número fijo. La elección del modelo depende de la correlación entre el efecto individual y las variables explicativas, la cual se revisa por medio de la prueba de Hausman (véase Hsiao, 2003).

²⁶ Un ejercicio interesante sería obtener coeficientes diferentes en todas las variables para cada banco central mediante la utilización de un modelo tipo Swamy; sin embargo, el número de años para los que se obtuvo información es muy corto y hace imposible emplear este tipo de modelos (Amemiya, 1978).

Cuadro 5
Resultados del modelo

Variable dependiente: Ln (C)
Observaciones: 168, método MCG

Intercepto	10,3371 (1,50)
Ln (N)	0,5894 (4,35) ***
Ln (Circ)	0,7395 (5,21) ***
Ln (Y)	-0,1085 (-2,03) **
Ln (Den)	0,6740 (1,87) *
Ln (Seg)	SC (-0,71)
Ln (Tam)	1,9855 (3,09) ***
Priv	-0,0895 (-2,17) **
Gob	0,3402 (2,11) **
Wald (p-value)	293,59 (0,00)
Hausman (p-value)	2,7103 (0,93)

Nota: los símbolos (*, **, ***) indican que el estadístico es significativamente diferente de cero, con un nivel de confianza del 90%, 95% y 99%.

SC: signo contrario.

Test de Wald: Significación conjunta de las variables (Prob > Chi²).

Test de Hausman: Las diferencias en los coeficientes no son sistemáticas (Prob > Chi²).

tal como se esperaba teóricamente. Esto corrobora que las economías más desarrolladas presentan un mayor uso de medios de pago electrónicos, lo cual se relaciona con una menor necesidad de efectivo y con menores costos.

La estructura de denominaciones empleada por los bancos centrales resultó significativa con un nivel de confianza del 90%. Esto demuestra que su definición tiene efecto sobre los costos de impresión de billetes y, por tanto, un banco central con menor número de denominaciones obtendría costos más bajos.

Por otro lado, la variable que capturaba el número de características de seguridad (Seg) dio como resultado un coeficiente con signo contrario al esperado y

estadísticamente no significativo, mostrando no influir sobre los costos de producción. Esto seguramente se debe a que, más que el número de elementos lo relevante en los costos sea el tipo de seguridad empleada; no obstante, esta información es muy difícil de incluir en la estructura del modelo.

La variable de tamaño de los billetes, que pretendía capturar una característica importante del producto, resultó altamente significativa y con el signo esperado. Esto quiere decir que las decisiones que un banco central tome acerca del tamaño de los billetes impactan de forma importante los costos de producción, y que para reducirlos puede optar por billetes de menor tamaño. Lo anterior soporta en buena parte las decisiones que en ese sentido han tomado recientemente varios bancos centrales (e. g. Colombia y México).

Uno de los resultados más relevantes del modelo tiene que ver con los coeficientes de las variables relacionadas con las modalidades de producción. Estas variables resultaron altamente significativas, validando que el tipo de modalidad escogida en un país para la fabricación de los billetes determina significativamente los costos. Los coeficientes obtenidos y sus signos permiten concluir algunos aspectos importantes, teniendo en cuenta que la modalidad base dentro del modelo es cuando la producción está a cargo del banco central. En primer lugar, cuando la producción de billetes se encuentra a cargo de los gobiernos los costos son

más altos, frente a cuando lo hace el banco central, por una amplia diferencia. De hecho, el coeficiente sugiere que en aquellos países donde el Gobierno se encarga de la producción el costo es, en promedio, un 34% mayor.

En segundo lugar, cuando se permite algún grado de participación por parte de agentes privados en el proceso de producción de billetes los costos son menores que cuando lo realiza el banco central únicamente. Estos resultados validan decisiones que han tomado algunos bancos centrales con respecto a la vinculación de agentes privados especializados en la producción de billetes, ya sea mediante contratos de administración, creación de subsidiarias, venta total de sus imprentas, entre otros. El cálculo de elasticidades a partir de los coeficientes permite inferir que un banco central que vincule al sector privado en la producción de billetes podría obtener una reducción cercana al 9% en sus costos anuales.

C. Eficiencia y cambio en productividad

La estimación de la función de costos permitió identificar las variables que

determinan los costos de impresión de billetes en los bancos centrales estudiados, así como las posibles estrategias que pueden emplear para su reducción. Para complementar este análisis es necesario conocer el nivel de eficiencia técnica de los bancos centrales en la producción de billetes y, a su vez, el cambio en produc-

tividad que han presentado durante el período de estudio. Estas medidas se obtienen mediante la estimación de una frontera de producción eficiente y el cálculo del índice de Malmquist, el cual permite, al tiempo, desagregar el crecimiento de la productividad en dos componentes: cambios en eficiencia y en

la tecnología a lo largo del tiempo.

La frontera de eficiencia se puede estimar mediante el método no paramétrico denominado Data Envelopment Analysis (DEA), o por medio del enfoque paramétrico Stochastic Frontier Approach (SFA)²⁷. Entre las aplicaciones recientes para la banca central se destaca el trabajo de Wheelock y Wilson (2004), donde se emplea un modelo DEA para la medición de eficiencia en el procesamiento de cheques que realizan las oficinas de la Reserva Federal estadounidense (Fed). Desde el enfoque de frontera estocástica (SFA), Bohn *et al.* (2001) evalúan la eficiencia

²⁷ El método SFA, propuesto por Aigner *et al.* (1977), con base en la estimación de una función de costos o de producción (*e. g.* Cobb Douglas o *translog*), cuenta con parámetros que permiten caracterizar la frontera de eficiencia.

en la función de procesamiento del efectivo que realizan las 37 oficinas de la Fed. Esta misma función fue evaluada por Sarmiento (2005) utilizando un modelo DEA para las quince sucursales del Banco de la República, durante 2000 a 2004. Una comparación a nivel internacional fue realizada por McKinley y Banaian (2005) empleando el enfoque SFA para evaluar la eficiencia de la política monetaria y la supervisión financiera en 32 bancos centrales de la OECD y de economías en desarrollo²⁸.

Por su parte, el cambio en productividad se puede calcular por medio de la estimación de una función de producción (o de costos), o mediante la construcción de números índices usando métodos no paramétricos. Desde este último enfoque se encuentra el índice de Malmquist, el cual fue planteado inicialmente por Caves *et al.* (1982) y ampliado por Färe *et al.* (1989), para descomponer el crecimiento de la productividad en dos componentes: cambios en eficiencia técnica y en la tecnología a lo largo del tiempo²⁹.

Para evaluar la eficiencia técnica en la producción de billetes de los 28 bancos centrales seleccionados se propone un

modelo DEA orientado a insumos con información del período 2000-2005. Desde la misma perspectiva, se calcula el índice de Malmquist para estimar el cambio en productividad y sus dos componentes.

La adopción del enfoque no paramétrico para estimar las medidas de eficiencia y cambio en productividad radica en que este no requiere la imposición de una forma funcional específica (no conocida) para la estructura de producción o tecnología, la cual es necesaria en el enfoque paramétrico. Adicionalmente, el índice de Malmquist no exige información sobre las cantidades y los precios de los insumos y productos, y a su vez no requiere supuestos acerca de la condición de maximización de beneficios o minimización de costos para las unidades evaluadas, condiciones que requieren los índices de Törnqvist y Fisher empleados para medir el cambio en productividad. Estas características convierten al índice de Malmquist en un instrumento de gran utilidad para el análisis de los cambios de productividad en el sector público, en donde los precios habitualmente no están disponibles, situación que también se presenta en la banca central (véase Coelli, 1998).

Desde este enfoque el término de error se divide en dos componentes: el error aleatorio y la ineficiencia técnica (Kumbhakar y Lovell, 2000). Por su parte, en el método DEA, propuesto por Charnes *et al.* (1978), se define un conjunto de variables (insumos y productos) y el tipo de rendimientos a escala mediante un programa lineal que es optimizado para encontrar un índice de eficiencia técnica para cada unidad evaluada (Cooper *et al.*, 2000).

²⁸ Un análisis detallado de los modelos de frontera eficiente y su aplicación en la banca central puede verse en Mester (2003) y Sarmiento (2007).

²⁹ El índice de Malmquist ha sido ampliamente aplicado en el sistema financiero, principalmente para analizar los cambios en productividad después de los procesos de liberalización financiera (Humphrey, 1993; Wheelock y Wilson, 1999; Park y Weber, 2006). Una amplia revisión de las aplicaciones de esta metodología en el sistema financiero puede verse en Berger y Mester (1997).

1. Eficiencia técnica, global y de escala

Desde el enfoque DEA se considera un conjunto de posibilidades de producción (CPP) o tecnología, que en adelante denominaremos Z , el cual se asume como cerrado, convexo y que cumple fuertemente la disponibilidad de insumos y productos. El CPP se compone de un vector M de insumos $x = (x_1, \dots, x_M)' \in R_+^M$ que son empleados para producir un vector S de productos $y = (y_1, \dots, y_S)' \in R_+^S$.

Una vez definida la tecnología de producción, se tiene que los N bancos centrales consumen cada uno M cantidades de insumos para producir S productos³⁰. En particular, el banco central j consume X_{ji} del insumo i y produce Y_{jr} del producto r , asumiendo que $X_{ji} \geq 0$ y $Y_{jr} \geq 0$. En efecto, X y Y son matrices $M \times N$ y $S \times N$ que contienen la totalidad de los insumos y productos que corresponden a los N bancos centrales evaluados. De esta forma, el modelo que permite medir la eficiencia técnica en insumos para cada uno de los bancos centrales durante el período t se plantea como (Charnes *et al.*, 1978):

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \theta, \lambda \quad (6) \\ & \text{s.a. } \lambda X^t - \theta x_0^t \leq 0 \\ & \lambda Y^t \geq y_0^t \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

El modelo expresado en (6) busca minimizar la cantidad de insumos empleados por el banco central evaluado, donde θ es un escalar que acompaña cada uno de sus insumos y λ un vector de intensidad ($N \times 1$), el cual pondera el nivel de insumos y productos de todos los bancos centrales evaluados. Este proceso se repite para cada banco central j introduciendo en el modelo: $(x_0, y_0) = (x_j, y_j)$. De esta forma, un banco central presenta eficiencia técnica si $\theta^* = 1$ y $\lambda^* = 0$ y es ineficiente³¹ cuando $\theta^* < 1$ y $\lambda^* > 0$.

El modelo supone rendimientos constantes a escala (CRS, por su sigla en inglés), lo cual indica que todos los bancos centrales operan en una escala óptima de producción. Sin embargo, las imperfecciones del mercado, junto con la presencia de factores fuera del control de los bancos centrales (e.g. la demanda de efectivo), pueden generar que un banco central deje de operar a escala óptima. Por tal motivo, Banker *et al.* (1984) estudian

³⁰ Färe (1988) define formalmente que en el CPP de los productos $P(x)$ y de los insumos $L(y)$ se cumple que $(x, y) \in Z \Leftrightarrow y \in P(x) \Leftrightarrow x \in L(y)$. Dada esta relación, Z satisface fuertemente la disponibilidad de productos e insumos, si para un proceso productivo $(x, y) \in Z, \forall x' \geq x \Rightarrow (x', y) \in Z$ y $\forall y' \leq y \Rightarrow (x, y') \in Z$, o alternativamente si $x \in L(y), x' \in L(y), \forall x' \geq x$ e $y \in P(x), y' \in P(x), \forall 0 \leq y' \leq y$.

³¹ Sin embargo, puede ocurrir que un banco central presente $\theta^* = 1$ y $\lambda^* > 0$, siendo este un punto fronterizo ubicado en la zona débil de la frontera de eficiencia. Para distinguir entre un punto fronterizo y un punto fronterizo eficiente Seiford y Thrall (1990) señalan que la proyección radial $(x_0, y_0) \rightarrow (\theta^* x_0, y_0)$ siempre conduce a un punto fronterizo, pero la eficiencia técnica sólo se logra si $\theta^* x_0 = X \lambda^*$ y $y_0 = Y \lambda^*$, para todo λ^* . Por tanto, para alcanzar la eficiencia técnica las restricciones se deben cumplir con igualdad.

la presencia de retornos variables a escala (VRS, por su sigla en inglés) incorporando en el modelo (6) la restricción $e^T \lambda = 1$ (e es un vector de unos $N \times 1$), lo cual genera un requerimiento de convexidad que fuerza a la frontera eficiente de posibilidades de producción a contar con segmentos que unan los puntos extremos. De esta forma, desde el modelo CRS se obtiene una medida de eficiencia técnica global (ETG) sin eficiencias de escala; mientras que con el modelo VRS se encuentra una medida de eficiencia técnica (ET), donde se identifica, adicionalmente, si el banco central opera en una zona de rendimientos crecientes o decrecientes a escala. La razón entre ambos modelos permite encontrar una medida de eficiencia de escala (EE) para cada banco central, donde $EE = \theta^{CRS} / \theta^{VRS}$.

2. El cambio en productividad desde el índice de Malmquist

Para estimar el cambio en productividad se emplea el índice de Malmquist, siguiendo el enfoque propuesto por Färe *et al.* (1989), donde los cambios en productividad son determinados por variaciones en eficiencia y en tecnología a lo largo del tiempo. El índice de Malmquist se expresa de la siguiente manera (véase el Apéndice):

$$(7) \quad M_t(X^{t+1}, Y^{t+1}, X^t, Y^t) = \frac{D_t^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_t^t(X^t, Y^t)} \left[\frac{D_t^t(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_t^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})} \times \frac{D_t^t(X^t, Y^t)}{D_t^{t+1}(X^t, Y^t)} \right]^{1/2}$$

De esta forma, el primer término de (7) cuantifica el cambio en la eficiencia técnica (*catch-up*) del banco central, y tiene por función comparar su cercanía a la frontera de eficiencia en cada período. Si este componente registra un valor por encima de 1, indicará que el banco central ha sido más eficiente en el período $t + 1$, comparado con el período t (es decir, que se ha movido más cerca de la frontera en el período $t + 1$). Por el contrario, cuando este componente esté por debajo de 1, se entiende que el banco central ha sido menos eficiente entre los períodos de comparación. El segundo componente de la expresión registra el cambio técnico (*boundary shift*) que exhibe la industria (conjunto de bancos centrales), el cual se encuentra al comparar la distancia entre las dos fronteras de eficiencia calculadas en t y $t + 1$. En efecto, si este término toma un valor superior a 1 indicará que la industria presentó un progreso tecnológico que benefició al banco central.

El producto de ambos componentes da origen al índice de Malmquist, donde un valor superior a 1 indicará que el banco central evaluado presentó un incremento en su productividad, el cual puede obedecer a una mayor eficiencia técnica y/o a un progreso tecnológico. En presencia de VRS el cambio en la eficiencia técnica, medido por el primer componente del índice de Malmquist, puede, a su vez, dividirse en dos componentes: eficiencia técnica pura y de escala (Färe *et al.*, 1994):

$$\begin{aligned}
 (8) \quad CE &= \frac{D_i^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_i^t(X^t, Y^t)} \\
 &= \frac{D_{VRS}^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_{VRS}^t(X^t, Y^t)} \times \frac{\frac{D_{CRS}^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_{VRS}^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}}{\frac{D_{CRS}^t(X^t, Y^t)}{D_{VRS}^t(X^t, Y^t)}}
 \end{aligned}$$

Para el cálculo del índice de Malmquist y sus componentes se emplea el método no paramétrico (DEA), asumiendo que las funciones de distancia son recíprocas de la medida de eficiencia técnica orientada a insumos definida en (6) (Seiford y Thrall, 1990).

3. Resultados sobre eficiencia y cambio en productividad

Para la medición de eficiencia técnica y cambio en productividad se emplearon como insumos el costo de impresión y el tamaño de los billetes por considerarse de manejo discrecional para el banco central; y como productos se incluyeron el efectivo en circulación por habitante y el número de denominaciones, variables que también presentaron una alta *significancia* estadística como determinantes de los costos de producción de billetes (sección II). La estimación se realizó para los 28 bancos centrales con información de 2000 a 2005 (Anexo 5).

En el Cuadro 6 se presentan los resultados de las tres medidas de eficiencia (técnica, global y de escala) calculadas con el modelo expresado en (6). Los resultados del modelo con VRS muestran que durante el período de estudio el 75% de los bancos centrales evaluados

incrementaron su ET en la producción de billetes y que, en promedio, el conjunto de bancos centrales registró un índice del 0,93. Se destacan los bancos centrales de Bulgaria, Eslovenia y Estonia por ubicarse en la frontera de eficiencia durante todo el período. En estos bancos centrales la producción de billetes se realiza con la modalidad de subsidiaria, banco central e importación, respectivamente.

Al examinar la ETG, que resulta del cálculo del modelo con CRS, se observa una reducción importante en el índice de eficiencia, el cual pasa al 0,79 en promedio. Esto obedece a que desde el enfoque CRS los bancos centrales se comparan, asumiendo que operan en una escala óptima de producción, lo cual en la práctica no ocurre para todos los bancos, debido a las imperfecciones del mercado, en especial al comportamiento de la demanda de dinero. Esta situación se contrasta empíricamente mediante el cálculo de un índice de EE, donde se aprecia que el 68% de los bancos centrales están en la zona de retornos decrecientes a escala (*drs*, por su sigla en inglés), mientras que el 28% se ubicó en la zona de retornos crecientes a escala (*irs*, por su sigla en inglés). Únicamente el banco central de Eslovenia se ubica en la zona de retornos constantes o escala óptima (*crs*, por su sigla en inglés) con un índice de 1.

Conocer el tipo de retornos a escala es muy útil para nuestro análisis de eficiencia, ya que permite identificar aspectos claves para

Cuadro 6
Eficiencia técnica, global y de escala en los bancos centrales

Banco	Modalidad ^{a/}	Eficiencia técnica (ET-VRS)						Promedio (2000-2005)		
		2000	2001	2002	2003	2004	2005	ET (vrs)	ETG (crs)	EE
Alemania	EP	0,946	1,000	1,000	1,000	1,000	0,933	0,980	0,973	0,994 (drs)
Armenia	BC	0,993	0,928	0,966	0,932	1,000	0,946	0,961	0,717	0,746 (irs)
Australia	S	0,940	0,961	0,972	0,990	0,996	0,995	0,976	0,790	0,810 (drs)
Austria	S	0,971	0,918	0,891	0,910	0,922	0,941	0,925	0,866	0,935 (drs)
Bulgaria	S	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,879	0,8792 (irs)
Canadá	EP	0,912	0,878	0,874	0,880	0,878	0,881	0,884	0,689	0,780 (drs)
Chipre	I	1,000	0,876	0,999	0,958	0,915	0,895	0,940	0,591	0,628 (drs)
Colombia	BC	0,878	0,867	0,888	0,913	0,921	0,927	0,899	0,714	0,794 (irs)
Corea	G	0,776	0,757	0,773	0,782	0,782	0,778	0,775	0,553	0,714 (drs)
Dinamarca	BC	0,938	0,937	0,918	0,925	0,930	0,931	0,930	0,732	0,788 (drs)
Eslovenia	BC	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000 (crs)
España	G	0,904	0,887	0,871	0,871	0,886	0,903	0,887	0,832	0,938 (drs)
Estonia	I	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,949	0,949 (drs)
Finlandia	EP	0,896	0,891	0,968	0,958	0,966	0,949	0,938	0,841	0,897 (drs)
Holanda	EP	0,899	0,854	0,897	0,892	0,915	0,938	0,899	0,844	0,938 (drs)
Hungría	S	0,872	0,880	0,893	0,891	0,897	0,894	0,888	0,821	0,925 (irs)
Inglaterra	EP	0,797	0,806	0,814	0,828	0,833	0,829	0,818	0,633	0,774 (drs)
Irlanda	BC	0,984	0,947	0,893	0,908	0,935	0,937	0,934	0,845	0,904 (irs)
Israel	I	0,996	0,937	0,922	0,969	0,959	0,953	0,956	0,623	0,651 (drs)
Japón	G	1,000	1,000	0,898	1,000	1,000	1,000	0,983	0,969	0,985 (drs)
Luxemburgo	I	1,000	0,986	0,975	1,000	1,000	1,000	0,994	0,905	0,911 (drs)
Noruega	BC	0,939	0,931	0,922	0,939	0,940	0,946	0,936	0,770	0,823 (drs)
Nva. Zelanda	I	0,954	0,967	1,000	0,993	1,000	0,986	0,983	0,726	0,738 (irs)
Polonia	EP	0,955	0,961	0,970	1,000	1,000	1,000	0,981	0,740	0,754 (drs)
Portugal	S	0,875	0,889	0,873	0,900	0,923	0,906	0,894	0,804	0,899 (irs)
Rep. Checa	G	0,927	0,926	0,925	0,928	0,932	0,941	0,930	0,906	0,975 (drs)
Suecia	EP	0,905	0,879	0,877	0,902	0,911	0,904	0,896	0,725	0,809 (irs)
Tailandia	BC	0,815	0,794	0,816	0,838	0,846	0,845	0,826	0,663	0,803 (drs)
Promedio	..	0,931	0,916	0,921	0,932	0,939	0,934	0,929	0,789	0,848

a/ Modalidad para la producción de los billetes en 2005. EP: empresa privada; BC: banco central; S: subsidiaria; I: importación; G: gobierno.

ETG: Eficiencia técnica global – modelo CRS

ET: eficiencia técnica – modelo VRS

Eficiencia escala = ETG / ET

drs: retornos a escala decrecientes

irs: retornos a escala crecientes

crs: retornos a escala constantes

el desempeño de los bancos centrales. En efecto, para éstos ubicados en la zona de irs se espera que un aumento en el nivel de insumos conduzca a incrementos proporcionalmente mayores en el nivel de

producto. En el caso de Colombia, por ejemplo, este resultado indica que un aumento en la capacidad instalada se verá compensado por incrementos mayores en el nivel de producción de billetes. Esto

valida, en parte, la creación de la Central de Efectivo, el complejo donde convergen los procesos de impresión de billetes y distribución de efectivo que inició operaciones en 2006.

Los resultados del cálculo del índice de Malmquist y de sus componentes se presentan en el Cuadro 7: se observa que durante el período los bancos centrales

presentaron un incremento moderado en su productividad, siendo el período 2004 a 2005 el de mayor incremento (1,7%). Los bancos centrales de Portugal, Bulgaria, Austria, Australia, Colombia y Suecia presentaron incrementos de productividad promedio superiores al 10%, mientras que el total del grupo se ubicó en el 0,2%. Se destaca que cerca del 40% de los bancos centrales que presentaron

Cuadro 7
Índice de Malmquist, cambio técnico y cambio en eficiencia

Banco central	Modalidad ^{a/}						Promedio (2000-2005)				
		00-01	01-02	02-03	03-04	04-05	Índice de Malmquist	Cambio técnico	Cambio en eficiencia	Eficiencia pura	Eficiencia escala
Alemania	EP	0,996	1,000	1,000	1,000	0,960	0,991	1,002	0,992	0,998	0,993
Armenia	BC	0,974	1,018	1,033	0,997	0,966	0,998	0,961	1,037	0,992	1,048
Australia	S	0,994	0,986	1,023	1,018	1,051	1,014	1,039	0,975	1,011	0,965
Austria	S	0,986	1,002	1,000	1,047	1,031	1,013	1,015	0,999	0,994	1,003
Bulgaria	S	0,995	1,033	1,024	0,997	1,019	1,014	1,013	1,001	1,000	1,001
Canadá	EP	0,975	0,935	1,010	0,994	1,039	0,991	0,999	0,990	1,007	0,996
Chipre	I	0,994	1,031	1,033	0,997	0,971	1,005	1,015	0,991	0,982	1,011
Colombia	BC	0,995	1,002	1,003	1,056	1,005	1,012	0,937	1,069	1,011	1,057
Corea	G	0,985	0,976	1,000	1,036	1,013	1,002	1,033	0,994	1,001	0,993
Dinamarca	BC	0,966	0,950	1,015	1,003	1,046	0,996	0,988	0,993	0,998	0,994
Eslovenia	BC	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
España	G	0,961	0,971	0,999	0,995	1,029	0,991	0,950	1,048	1,000	1,048
Estonia	I	0,976	1,009	1,004	0,999	1,003	0,998	0,984	1,010	1,000	1,010
Finlandia	EP	0,977	0,994	1,022	1,010	1,007	1,002	0,934	1,072	1,012	1,056
Holanda	EP	0,972	0,988	0,992	1,014	1,049	1,003	0,977	1,026	1,009	1,015
Hungría	S	0,985	1,013	0,999	0,996	1,010	1,001	0,970	1,032	1,005	1,027
Inglaterra	EP	0,971	0,987	1,000	0,995	1,042	0,999	0,998	0,994	1,008	0,986
Irlanda	BC	0,963	1,005	0,999	1,023	1,029	1,004	0,983	1,021	0,991	1,032
Israel	I	0,973	0,955	1,000	0,995	1,025	0,990	1,001	0,989	0,992	0,998
Japón	G	1,000	0,988	1,009	0,977	1,006	0,996	0,990	1,002	1,002	1,001
Luxemburgo	I	0,976	1,007	1,024	0,995	1,005	1,001	0,959	1,049	1,000	1,049
Noruega	BC	0,974	0,986	1,000	1,031	1,055	1,009	1,015	0,994	1,007	0,989
Nva. Zelanda	I	0,998	0,995	1,003	0,996	1,005	1,000	0,998	1,002	1,007	0,996
Polonia	EP	0,988	0,994	0,998	0,996	1,010	0,997	0,996	1,002	1,009	0,993
Portugal	S	0,986	1,057	1,005	1,016	1,027	1,018	0,968	1,051	1,007	1,044
Rep. Checa	G	0,981	1,004	0,999	0,995	1,018	0,999	0,990	1,006	1,003	1,003
Suecia	EP	0,987	1,003	1,017	0,990	1,060	1,011	1,024	0,988	1,000	0,988
Tailandia	BC	0,994	1,002	1,001	0,999	0,997	0,998	0,999	0,999	1,007	0,992
Promedio		0,983	0,996	1,008	1,006	1,017	1,002	0,991	1,012	1,002	1,010

a/ Modalidad para la producción de los billetes en 2005. EP: empresa privada; BC: banco central; S: subsidiaria; I: importación; G: gobierno.

un incremento promedio en productividad hacen sus billetes por medio de una subsidiaria. Le siguen en participación la modalidad de empresa privada y de banco central, con tres referencias cada una.

En términos generales, se aprecia que el incremento en productividad obedece en mayor medida a una ganancia en eficiencia por parte de los bancos centrales, y en menor proporción a un cambio técnico. A su vez, en la mayoría de los casos el cambio positivo es el resultado de una mayor eficiencia de escala y en menor magnitud debido a un acercamiento de los bancos centrales a su frontera de referencia (eficiencia pura). Esto puede obedecer a la creciente demanda de efectivo, que ha generado un incremento importante en la producción de billetes para la mayoría de los bancos centrales estudiados. En el caso particular de Colombia la producción de billetes se ha incrementado en cerca de un 45% durante el período, debido, principalmente,

al gravamen a las transacciones financieras que desincentivó el uso del cheque y de los medios electrónicos de pago³².

III. CONCLUSIONES

En este documento se identificaron las recientes estrategias de modernización que los bancos centrales han implementado para atender la creciente demanda de efectivo durante años recientes. Se destaca que, durante el período de estudio, se presentó una reducción en el número de bancos centrales impresores y un incremento de la participación parcial o total de terceros en el proceso de producción de billetes (e. g. Croacia, Inglaterra, Suecia y Bulgaria). Otra estrategia fue la implementada por los bancos centrales de Portugal y Colombia, donde se integran en un solo complejo actividades de producción, procesamiento y distribución del efectivo.

Se observa que durante el período los bancos centrales presentaron un incremento moderado en su productividad, siendo el período 2004 a 2005 el de mayor incremento (1,7%). Los bancos centrales de Portugal, Bulgaria, Austria, Australia, Colombia y Suecia presentaron incrementos de productividad promedio superiores al 10%, mientras que el total del grupo se ubicó en el 0,2%. Se destaca que cerca del 40% de los bancos centrales que presentaron un incremento promedio en productividad hacen sus billetes por medio de una subsidiaria. Le siguen en participación la modalidad de empresa privada y de banco central, con tres referencias cada una.

³² Arango *et al.* (2006) muestran que la economía subterránea también ha tenido una influencia importante sobre la demanda de efectivo en Colombia.

Se encontró que en Latinoamérica la mayoría de los bancos centrales estudiados importa sus billetes, lo cual se convierte en una oportunidad de mercado para los bancos centrales impresores de la región. En cuanto a la estructura de denominación, se identificó que los países de economías avanzadas tienden a mantener un número menor de denominaciones, frente a los países en desarrollo, y que a su vez estos últimos han emitido nuevas denominaciones en años recientes (*e. g.* Bulgaria y Uruguay).

Existen importantes diferencias en el uso de características de seguridad en los billetes, las cuales varían entre países y denominaciones, y se relacionan con el material utilizado para imprimir los billetes (papel de algodón o polímero). En este sentido, se identifica una tendencia hacia la producción de billetes en polímero, especialmente de las denominaciones más bajas, que son las que presentan una menor vida útil (*e. g.* Brasil, México y Chile). Se resalta, también, que en Latinoamérica y en el grupo de otros países en desarrollo el tamaño promedio de los billetes es menor al de los países de economías avanzadas. Además, se identifica una tendencia hacia reducir el tamaño de los billetes, buscando diferenciarlos de acuerdo con la denominación (*e. g.* Colombia y México).

Por otra parte, el análisis comparativo de los costos de impresión de billetes permitió identificar que existen amplias diferencias entre bancos centrales, las cuales obedecen, principalmente, al tamaño de

la población del país y al nivel de efectivo en circulación. La estimación de la función de costos, por su parte, muestra que el número de denominaciones y el tamaño de los billetes son determinantes importantes de los costos de impresión. Por tanto, reducciones en estas características conducen a ahorros significativos en términos de costos. Así mismo, se encontró que la modalidad empleada por un banco central para la producción de billetes es un factor determinante de los costos. De hecho, se identificó que la impresión a cargo del gobierno es la modalidad más costosa, mientras que la vinculación del sector privado al proceso de producción (*e. g.* contratos de administración, subsidiarias, firmas especializadas) disminuye los costos de forma importante.

Mediante la estimación del modelo de frontera eficiente se encontró que la mayoría de los bancos centrales han incrementado su eficiencia técnica durante el período de estudio, principalmente aquellos que cuentan con la participación del sector privado por medio de diferentes modalidades. De igual forma, el cálculo del índice de Malmquist mostró que los bancos centrales han presentado un leve incremento en su productividad, lo cual obedece, en mayor medida, al aumento en la eficiencia, y en menor proporción, a un cambio técnico. En la mayoría de los casos el cambio positivo es el resultado de una mayor eficiencia de escala, la cual obedece parcialmente al elevado crecimiento de la demanda de efectivo.

Este estudio identifica las posibles estrategias para reducir los costos de impresión de billetes y a aumentar la eficiencia en el desempeño de esta función. Entre las principales estrategias se destacan la reducción en el número de denominaciones y en el tamaño de los billetes, así como la vinculación del sector privado

en algún aspecto del proceso de producción. Sin embargo, en varios países existen condiciones económicas e institucionales (*e. g.* alto nivel de falsificación o economía subterránea) que deben ser evaluadas cuidadosamente antes de la adopción de alguna de las estrategias mencionadas.

REFERENCIAS

- Aigner, D. J.; Lovell, C. A. K.; Schmidt, P. J. "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models", *Journal of Econometrics*, núm. 6, pp. 21-37, 1977.
- Amemiya, T. "A Note on a Random Coefficients Model", *International Economic Review*, vol. 19, núm. 3, octubre, 1978.
- Arango, C.; Misas, M.; López, E. "Economía subterránea en Colombia 1976- 2003: una medición a partir de la demanda de efectivo", *Ensayos sobre Política Económica*, núm. 50, 2006, pp. 155-211, Banco de la República.
- Banco de la República. "Tendencias en funciones y planta de personal de bancos centrales" (documento interno), Departamento de Planeación y Presupuesto, Banco de la República, Bogotá, D. C., disponible en: <<http://www.banrep.gov.co/banco/pdf/Bancos-centrales-tendencias.pdf>>, junio, 2005.
- Banker, R. D.; Charnes, A.; Cooper, W. "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, núm. 30, vol. 9, pp. 1078-1092, 1984.
- Banco de Inglaterra. "Sale of Bank Note Printing Operations", disponible en: <<http://www.bankofengland.co.uk/publications/news/2003/041.htm>>, marzo, 2003.
- Battese, G.; Coelli, T. "A Model for Technical Inefficiency Effects in a Stochastic Frontier Production Function for Panel Data", *Empirical Economics*, núm. 20, pp. 325-332, 1995.
- Baxter, A.; Gerard, A.; Melbourn, B.; Noble, B. "Alternative Models for Outsourcing Banknote Services", N. Courtis y N. Peter (eds.), *Central Bank Modernisation*, Central Banking Publications, Londres, 2005.
- Berger, A. N.; Mester, L. J. "Inside the Black Box: What Explains Differences in the Efficiencies of Financial Institutions?", *Journal of Banking and Finance*, núm. 21, pp. 895-947, 1997.
- Bank for International Settlements (BIS). "Statistics on Payment and Settlement Systems in selected countries", documento preparado para el Committee on Payment and Settlement Systems of the Group of Ten Countries, BIS, marzo, 2007.
- Bohn, J.; Hancock, D.; Bauer, P. "Estimates of Scale and Cost Efficiency for Federal Reserve Currency Operations", *Economic Review*, Q. IV, pp. 2-26, Research Department, Federal Reserve Bank of Cleveland, 2001.
- Booth, G. *Currency and Coin Responsibilities of the Federal Reserve: A Historical Perspective*, Federal Reserve Bank of Cleveland, Cleveland, 1989.
- Caves, D. W.; Christensen, L. R.; Diewert, W. E. "The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output, and Productivity", *Econometrica*, vol. 50, núm. 6, pp. 1393-1414, 1982.
- Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos (Cemla). "Estadísticas comparativas de sistemas de pago de América Latina y el Caribe, 2000-2004" (documento interno), Grupo de Trabajo sobre Sistemas de Pago de América Latina y del Caribe (GTSP-ALC)-Cemla, diciembre, 2005.
- Charnes, A.; Cooper, W.; Rhodes, E. "Measuring the Efficiency on Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, vol. 2, pp. 429-444, 1978.
- Coelli, T. J.; Prasada, D.; Battese, G. *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1998.
- Cooper W.; Seiford, L.; Tone, K. *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

-
- Daltung, S.; Ericson, M. "Cash-supply efficiency", *Economic Review*, núm. 3, pp. 27-42, Sveriges Riksbank, Stockholm, 2004.
- De Gregorio, J. "Mucho dinero y poca inflación: Chile y la evidencia internacional" (documento de política económica), Banco Central de Chile, septiembre, 2003.
- European Central Bank (ECB). "Payment and Securities Settlement Systems in the European Union" (documento interno), ECB, agosto, 2007.
- Färe, R.; Grosskopf, S.; Lindgren, B.; Roos, P. "Productivity Developments in Swedish Hospitals: A Malmquist Output Index Approach", documento de discusión, núm. 89-3, Southern Illinois University, Illinois, 1989.
- Färe, R.; Grosskopf, S.; Norris, S.; Zhang, Z. "Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Changes in Industrialised Countries", *American Economic Review*, núm. 84, pp. 66-83, 1994.
- Galán, J.; Sarmiento, M. "Staff, Functions, and Staff Costs at Central Banks: An International Comparison with a Labor-demand Model", Borradores de Economía, núm. 419, Banco de la República, noviembre, 2006.
- Hernández, M.; Jalil, M.; Posada, C. "¿Por qué ha crecido tanto la cantidad de dinero?: teoría y evidencia internacional (1975-2002)", Borradores de Economía, núm. 402, Banco de la República, agosto, 2006.
- Hsiao, C. *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- Humphrey, D. B. "Cost and Technical Change: Effects from Bank Deregulation", *Journal of Productivity Analysis*, núm. 4, pp. 5-34, 1993.
- Kumbhakar, S. C.; Lovell, C. A. K. *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- Lacker, J. "Should We Subsidize the Use of Currency?", *Economic Quarterly*, Winter, pp. 47-73, 1993.
- McKinley, V.; Banaian, K. "Central Bank Operational Efficiency: Meaning and Measurement", en *Central Bank Modernisation*, Neil Courtis y Peter Nicholl (eds.), Central Banking Publications Ltd., London, 2005.
- Mester, L. "Applying Efficiency Measurement Techniques to Central Banks", documento de trabajo, núms. 03-13, Federal Reserve Bank of Philadelphia and Finance Department, Wharton School, University of Pennsylvania, 2003.
- Misas, M.; Arango, C.; Hernández, J. "La demanda de especies monetarias en Colombia: estructura y pronóstico", Borradores de Economía, núm. 309, Banco de la República, octubre, 2004.
- Mushin, J. "Modeling the Currency Issue", *Atlantic Economic Journal*, vol. 26, núm. 3, septiembre, 1998.
- Nishihara, R. "Central Bank Services-Focusing on Core Banking Operations: Cash, Account, and Settlement Services", documento preparado para el 9^o BOJ-EMEAP High-Level Workshop, Bank of Japan, mayo, 2006.
- Park, K. H.; Weber, W. L. "A Note on Efficient Productivity Growth in the Korean Banking Industry, 1992-2002", *Journal of Banking and Industry*, núm. 30, pp. 2371-2386, 2006.
- Sarmiento, M. "Eficiencia técnica en el procesamiento de efectivo a cargo de las sucursales del Banco de la República" (*mimeo*), Departamento de Planeación y Presupuesto-Banco de la República, agosto, 2005.
- Sarmiento, M. "Eficiencia en la banca central moderna: teoría, evidencia y lecciones para América Latina" (*mimeo*), documento presentado en el Ciclo de conferencias sobre banca central, organizado por el Banco Central del Ecuador, Quito, junio 4-7, 2007.
- Seiford, L.M.; Thrall, R. M. "Recent Developments in DEA: The Mathematical Approach to Frontier Analysis", *Journal of Econometrics*, núm. 46, pp. 7-38, 1990.
- Symes, P. "Security Features in World Banknotes", disponible en www.pjsymes.com.au/articles/security.htm, 1993.
-

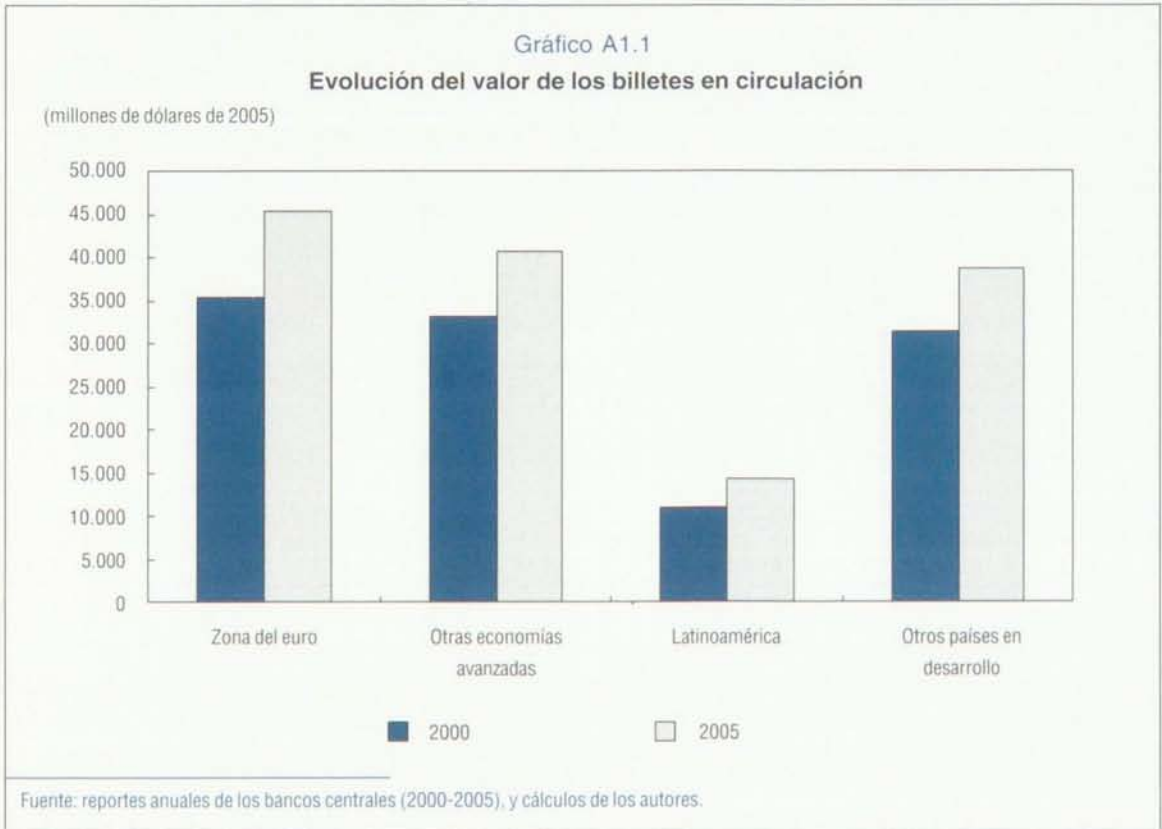
Wheelock, D.; Wilson, P. "Technical Progress, Inefficiency, and Productivity Change in U.S. Banking, 1984-1993", *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol. 31, núm.2, pp. 212-234, 1999.

Wheelock, D.; Wilson, P. "Trends in the Efficiency of Federal Reserve Check Processing Operations", *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, vol. 86, núm. 5, pp. 7-19, septiembre-octubre, 2004.

Wellink, N.; Chapple, B.; Maier, P. "The Role of National Central Banks within the European System of Central Banks: The example of the Nederlandsche Bank", MEB Series, núms. 2002-13, Netherlands' Central Bank-Monetary and Economic Policy Department, 2002.

ANEXOS

Anexo 1



Anexo 2

Cuadro A2.1

Países que cambiaron la estructura de denominación

País	Número de denominaciones	
	2000	2005
Alemania	8	7
Armenia	5	6
Austria	6	7
Bélgica	6	7
Bosnia	7	8
Bulgaria	6	7
Colombia	4	6
Costa Rica	7	4
España	4	7
Finlandia	5	7
Francia	5	7
Grecia	6	7
Holanda	6	7
Hungría	6	7
Irlanda	5	7
Luxemburgo	3	7
México	5	6
Portugal	5	7
Rumania	5	6
Uruguay	8	9

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), páginas electrónicas de los bancos centrales, y cálculos de los autores.

Anexo 3

Billetes en polímero

El sustrato de polímero es una película plástica transparente que se opaca utilizando una cobertura especial. La transparencia del sustrato varía alterando el espesor de dicha cobertura. Los billetes en polímero pueden contener la mayoría de características de seguridad tradicionales de los billetes de papel de algodón, aunque presentan otras que le son exclusivas, como las ventanas transparentes y los elementos de difracción. Sin embargo, desde 2006 De La Rue y G&D han desarrollado diferentes tecnologías que permiten introducir ventanas transparentes en el papel.

Los billetes de polímero presentan una vida útil entre tres y cuatro veces mayor a los de papel de algodón, pueden ser reciclados y se han definido como más higiénicos y más difíciles de falsificar. No obstante, sus costos de producción son más elevados, aunque, al tener una mayor vida útil, pueden representar ahorros financieros a largo plazo.

Australia ha sido líder en la producción de billetes en polímero y fue pionero en 1992 al emitir para circulación un billete en este material. En 1996 fue el primer país en abandonar completamente el papel y emitir todas sus denominaciones en sustrato plástico. Adicionalmente, se ha convertido en gran exportador de estos billetes mediante Note Printing Australia, empresa subsidiaria del banco central.

Para finales de 2005 se estima que existían en circulación más de 3.500 millones de billetes de polímero en el mundo. Para el mismo año 23 países habían implementado el sustrato plástico en al menos una denominación, de los cuales doce lo hicieron durante el período de estudio. Sin embargo, dos de estos países retornaron al papel en 2004 debido a altos costos de producción: en 1999 Indonesia había emitido el billete de 100.000 rupias y en 1997 Tailandia el de 50 baht.

Fuente: reportes anuales (2000-2005) y páginas electrónicas de los bancos centrales.

Cuadro A3.1
Países que han emitido billetes en polímero

País	Año de introducción de billetes en polímero	Número de denominaciones en polímero en circulación (2005)
Billetes para circulación general		
Australia ^{a/}	1992	5
Brunei ^{b/}	1996	3
Tailandia ^{c/}	1997	0
Sri Lanka	1998	1
Indonesia ^{d/}	1999	0
Nueva Zelanda ^{e/}	1999	5
Rumania ^{f/}	1999	7
Brasil ^{g/}	2000	1
Bangladesh	2001	1
Islas Salomón ^{h/}	2001	1
México ^{i/}	2002	1
Papúa Nueva Guinea ^{j/}	2003	6
Vietnam ^{k/}	2003	6
Zambia ^{l/}	2003	2
Chile ^{m/}	2004	1
Malasia	2004	1
Singapur	2004	1
Nepal	2005	1
Nigeria ^{n/}	2007	0
Hong Kong ^{ñ/}	2007	0
Guatemala ^{o/}	2007	0
Sólo billetes conmemorativos		
Samoa	1990	0
Kuwait	1993	0
Irlanda del Norte	1999	0
Taiwán	1999	0
China	2000	0

a/ En 1988 Australia introdujo el billete conmemorativo de AUD \$10 y en 1996 fue el primer país en tener todas las denominaciones en polímero.

b/ Los billetes de 1, 5 y 10 ringgit fueron los primeros no conmemorativos después de Australia.

c/ En 1996 emitió billetes conmemorativos y en 1997 para circulación el de 50 baht. Aunque regresó al papel en 2004.

d/ En 1999 emitió para circulación general el billete de 100.000 rupias. En 2004 volvió al papel.

e/ Importa sus billetes de Australia. En 1999 introdujo el polímero en todas las denominaciones.

f/ En 1999 fue el primer país europeo en introducir todas sus denominaciones en polímero. En 2005 llevó a cabo la redenominación y volvió a emitir todas las denominaciones en polímero.

g/ En 2000 emitió en polímero el billete de 10 reales para circulación, siendo el primer país latinoamericano en hacerlo.

h/ En 2001 emitió el billete de \$2, pero en 2006 volvió al papel.

i/ En 2002 emitió en polímero el billete de \$20 y en 2006 una nueva versión de \$20 y el de \$50.

j/ En 1991 introdujo uno conmemorativo de 2 kina. En 2003 emitió el billete de 20 kinas e inició el proceso de cambiar todas las denominaciones a polímero. A 2007 sólo le falta cambiar el de 5 kinas del total de sus siete denominaciones.

k/ En 2001 emitió el billete conmemorativo de 50 dong. Entre 2003 y 2006 cambió todas las denominaciones a polímero.

l/ En 2003 fue el primer país africano en emitir en polímero con los billetes de 500 y 1.000 kwachas.

m/ En 2004 emitió en polímero el billete de \$2.000 para circulación general.

n/ Emitió el billete de 20 nairas. En 2008 será el primer país africano en emitir todas sus denominaciones en polímero.

ñ/ En 2007 emitió el billete de 10 dólares por un período de prueba de dos años.

o/ A finales de 2007 emitirá en polímero el billete de 1 quetzal.

Nota: Bulgaria emitió en 2005 un billete híbrido papel-polímero, el cual se encuentra en período de prueba.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), páginas electrónicas de los bancos centrales.

Cuadro A3.2
Características de seguridad más usadas
en la producción de billetes, 2005

País	Polímero	MA	HS	IAR	RP	Hol	IO	UV	MI	TCC	Total
Zona del euro		x	x	x	x	x	x	x	x	x	9
Otras economías avanzadas											
Australia	x			x	x		x	x	x	x	6
Canadá		x	x	x	x	x	x	x	x	x	9
Chipre		x	x	x	x	x	x	x		x	8
Corea		x	x				x		x	x	5
Dinamarca		x	x	x		x	x	x	x	x	8
Estados Unidos		x	x						x	x	4
Hong Kong	x	x	x	x	x	x	x	x		x	8
Inglaterra		x	x	x		x		x	x		6
Islandia		x	x	x				x	x		5
Israel		x	x	x	x	x		x	x	x	8
Japón		x		x		x	x	x	x	x	7
Noruega		x	x		x	x	x	x	x	x	8
Nueva Zelanda	x			x	x		x	x	x		5
Suecia		x	x	x	x	x	x	x	x	x	9
Latinoamérica											
Argentina		x	x	x	x		x		x	x	7
Bolivia		x	x	x	x		x	x	x		7
Brasil	x	x	x	x	x		x		x		6
Chile	x	x	x	x	x		x			x	6
Colombia		x	x	x	x		x	x	x	x	8
Costa Rica		x	x	x	x		x		x		6
Guatemala*		x	x	x	x	x		x	x		7
México	x	x	x	x	x			x	x	x	7
Nicaragua		x	x	x	x	x		x	x	x	8
Paraguay		x	x	x	x	x	x	x	x		8
Perú		x	x	x			x		x	x	6
Rep. Dominicana		x	x	x				x	x	x	6
Uruguay		x	x	x	x	x	x	x	x		8
Venezuela		x	x	x	x	x	x	x	x	x	9
Otros países en desarrollo											
Albania		x	x	x	x	x	x	x	x	x	9

Cuadro A3.2 (continuación)
Características de seguridad más usadas
en la producción de billetes, 2005

Pais	Polímero	MA	HS	IAR	RP	Hol	IO	UV	MI	TCC	Total
Armenia		x	x	x	x				x		5
Bangladesh	x	x	x	x	x	x	x		x	x	8
Bosnia		x	x	x	x		x		x		6
Bulgaria		x	x	x	x	x		x	x	x	8
Croacia		x	x	x	x		x	x	x	x	8
Eslovaquia		x	x	x	x		x	x	x	x	8
Eslovenia		x	x	x	x			x	x	x	7
Estonia		x	x	x		x	x	x	x	x	8
Hungría		x	x	x	x	x	x	x	x	x	9
Malasia	x	x	x	x	x		x		x		6
Polonia		x	x		x	x	x	x	x	x	8
Rep. Checa		x	x		x			x	x	x	6
Rumania	x		x	x	x			x	x	x	6
Tailandia ^{a/}		x	x	x	x	x	x	x	x	x	9
Turquía		x	x	x	x		x	x	x	x	8
Total muestra	10	41	41	39	35	21	30	33	40	32	

Nota: MA: marca de agua; HS: hilo de seguridad; IAR: imagen en alto relieve; RP: registro perfecto; Hol: holograma; IO: imagen oculta; UV: observación bajo luz ultravioleta; MI: microimpresión; TCC: tinta que cambia de color.

a/ Guatemala emitirá próximamente un billete en polímero.

b/ En 2004 Tailandia volvió al papel luego de usar polímero.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), páginas electrónicas de los bancos centrales, y cálculos de los autores.

Anexo 4

Cuadro A4.1
Costo de impresión de billetes (promedio, 2000-2005)

Banco Central	Costo promedio anual ^{a/}	Costo en relación con el PIB ^{b/}	Costo en proporción a los costos operacionales ^{c/}	Costo por billete producido ^{d/}
Estonia	509.885	0,59	3,95	
Armenia	650.835	2,21	8,97	
Eslovenia	694.686	0,27	2,20	0,04
Chipre	834.281	0,68	2,86	
Nva. Zelanda	1.429.484	0,19	6,73	
Luxemburgo	1.490.411	0,58	4,10	
Israel	3.292.655	0,29	1,71	
Bulgaria	4.462.928	2,38	14,22	0,06
Dinamarca	4.491.171	0,23	4,78	
Rep. Checa	7.090.582	0,83	1,82	0,08
Noruega	8.182.138	0,38	3,67	0,11
Finlandia	9.221.025	0,61	8,64	
Australia	9.232.025	0,18	7,49	
Irlanda	9.436.190	0,67	12,95	0,06
Hungría	13.376.340	1,75	15,95	
Suecia	16.649.807	0,59	12,09	
Colombia	16.884.348	1,86	10,61	0,03
Canadá	17.508.515	0,21	12,73	
Holanda	25.281.483	0,53	8,13	
Portugal	26.148.199	1,90	9,20	
Polonia	27.361.343	1,24	9,40	0,10
Austria	33.828.479	1,40	12,58	
Tailandia	45.002.927	3,19	44,01	0,02
Inglaterra	60.551.726	0,34	18,73	0,07
Corea	61.136.159	1,01	19,62	0,05
España	95.034.242	1,16	22,90	
Alemania	135.992.422	0,59	7,28	
Japón	586.364.623	1,34	27,09	0,17

a/ Costo promedio anual en dólares constantes de 2005.

b/ Costo por cada 10.000 dólares de producto interno bruto (en dólares constantes de 2005).

c/ Costo de impresión como porcentaje de los costos operacionales del banco central.

d/ Costo promedio por billete en dólares constantes de 2005.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), y cálculos de los autores.

Anexo 5

Cuadro A5.1
Variables empleadas en el modelo de datos de panel
(muestra: 28 países; período: 2000-2005; observaciones: 168)

Variable	Promedio	Máximo	Mínimo	Desv. estándar
<i>C</i>	43,72	665,14	0,18	118,1
<i>N</i>	24.269,80	127.956,00	438	29.401,50
<i>Circ</i>	45.286	722.159	138,38	131.596
<i>Y</i>	22.482	75.189	571,21	15.844
<i>Den</i>	5,7	9	3	1,5
<i>Seg</i>	7	11,9	3	2,1
<i>Tam</i>	103,6	119,1	84,8	7,7

C: costos de impresión en millones de dólares constantes de 2005.

N: población en miles de habitantes.

Circ: efectivo en circulación en la economía en millones de dólares constantes de 2005.

Y: PIB per cápita en dólares constantes de 2005.

Den: número de denominaciones en circulación.

Seg: número de características de seguridad promedio de los billetes en circulación.

Tam: tamaño promedio de los billetes en circulación en cm².

Nota: A excepción del PIB per cápita, todas las variables fueron empleadas en el modelo de frontera eficiente.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), y cálculos de los autores.

Anexo 6

Cuadro A6.1
Modalidades empleadas por los bancos centrales
para la producción de billetes (panel de datos, 2000 y 2005)

País	Banco central		Empresa privada		Gobierno		Subsidiaria ^{a/}		Importación	
	2000	2005	2000	2005	2000	2005	2000	2005	2000	2005
Alemania	-	-	si	si	-	-	-	-	-	-
Armenia	si	si	-	-	-	-	-	-	-	-
Australia	-	-	-	-	-	-	si	si	-	-
Austria	-	-	-	-	-	-	si	si	-	-
Bulgaria	si	-	-	-	-	-	-	si	-	-
Canadá	-	-	si	si	-	-	-	-	-	-
Chipre	-	-	-	-	-	-	-	-	si	si
Colombia	si	si	-	-	-	-	-	-	-	-
Corea	-	-	-	-	si	si	-	-	-	-
Dinamarca	si	si	-	-	-	-	-	-	-	-
Eslovenia	si	si	-	-	-	-	-	-	-	-
España	-	-	-	-	si	si	-	-	-	-
Estonia	-	-	-	-	-	-	-	-	si	si
Finlandia	-	-	si	si	-	-	-	-	-	-
Holanda	-	-	si	si	-	-	-	-	-	-
Hungría	-	-	-	-	-	-	si	si	-	-
Inglaterra	si	-	-	si	-	-	-	-	-	-
Irlanda	si	si	-	-	-	-	-	-	-	-
Israel	-	-	-	-	-	-	-	-	si	si
Japón	-	-	-	-	si	si	-	-	-	-
Luxemburgo	-	-	-	-	-	-	-	-	si	si
Noruega	si	si	-	-	-	-	-	-	-	-
Nva. Zelanda	-	-	-	-	-	-	-	-	si	si
Polonia	-	-	si	si	-	-	-	-	-	-
Portugal	-	-	-	-	-	-	si	si	-	-
Rep. Checa	-	-	-	-	si	si	-	-	-	-
Suecia	si	-	-	si	-	-	-	-	-	-
Tailandia	si	si	-	-	-	-	-	-	-	-

a/ Incluye asociaciones de riesgo compartido.

Fuente: reportes anuales de los bancos centrales (2000-2005), y cálculos de los autores.

Apéndice

El enfoque del índice de Malmquist

El punto de partida desde este enfoque es la definición de un conjunto Z^t , o tecnología de producción, en el cual se produce la transformación de insumos $X^t \in R_+^M$ en productos $Y^t \in R_+^S$ para cada período de tiempo $t = 1, \dots, T$, donde se cumple que: $Z^t = \{(X^t, Y^t) : X^t \text{ puede producir } Y^t\}$. El índice de Malmquist se fundamenta en las funciones de distancia introducidas por Shepard, que en el caso de la orientación a insumos corresponde a:

(9)

$$D_j^t(X^t, Y^t) = \max[\theta \geq 1 : (X^t / \theta, Y^t) \in Z^t]$$

La expresión (9) busca la máxima contracción radial en los insumos para alcanzar un nivel dado de producto en el período t . De igual forma, en el período $t + 1$ la función distancia está dada por: $D_j^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})$. Para la comparación entre períodos se debe definir una función de distancia $D_j^t(X^{t+1}, Y^{t+1})$, donde la combinación (X^{t+1}, Y^{t+1}) es factible en relación con la tecnología en t y, a su vez, una función de distancia $D_j^{t+1}(X^t, Y^t)$ donde la combinación (X^t, Y^t) sea posible con la tecnología en $t + 1$. Una vez definidas las funciones de distancia podemos especificar el índice de Malmquist como:

(10)

$$M_j(X^{t+1}, Y^{t+1}, X^t, Y^t) = \left[\frac{D_j^t(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_j^t(X^t, Y^t)} \times \frac{D_j^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})}{D_j^{t+1}(X^t, Y^t)} \right]^{1/2}$$

La expresión (10) muestra que el índice de Malmquist es la media geométrica de dos indicadores que usan como referencia la tecnología en t y $t + 1$. Esta ecuación puede ser reformulada para obtener el cambio en productividad como resultado del cambio en la eficiencia técnica y del cambio tecnológico a lo largo del tiempo, tal como se expresa en la ecuación (9) de la sección III:

La medición del cambio en productividad para los bancos centrales entre t y $t + 1$ requiere resolver cuatro problemas de programación lineal: $D_j^t(X^t, Y^t)$, $D_j^{t+1}(X^t, Y^t)$, $D_j^t(X^{t+1}, Y^{t+1})$, $D_j^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})$. Para ello, suponemos que cada banco central $j = 1, 2, \dots, N$, usa $m = 1, 2, \dots, M$ insumos $x_m^{t,j}$ para producir $s = 1, 2, \dots, S$ productos $y_s^{t,j}$. En el primer caso, donde tomamos como referencia la tecnología y las observaciones en el período t , se debe resolver el siguiente problema para el banco central j :

$$\begin{aligned}
 & D_t^j(X^{t,j}, Y^{t,j}) = \min \theta^j \\
 \text{s.a.} & \sum_{j=1}^N \lambda^{t,j} x_m^{t,j} = \theta^j x_m^{t,j} \\
 \text{(11)} & \sum_{j=1}^N \lambda^{t,j} y_s^{t,j} = y_s^{t,j} \\
 & \lambda^{t,j} \geq 0
 \end{aligned}$$

Por su parte, la función de distancia $D_t^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})$ se computa de manera análoga al modelo (11) al sustituir $t + 1$ en t . Cuando las funciones de distancia requieren información de los dos períodos simultáneamente, el problema se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & D_t^j(X^{t+1,j}, Y^{t+1,j}) = \min \theta^j \quad (12) \\
 \text{s.a.} & \sum_{j=1}^N \lambda^{t,j} x_m^{t,j} = \theta^j x_m^{t+1,j} \\
 & \sum_{j=1}^N \lambda^{t,j} y_s^{t,j} = y_s^{t+1,j} \\
 & \lambda^{t,j} \geq 0
 \end{aligned}$$

En (12) la tecnología de referencia para el banco central evaluado $(X^{t+1,j}, Y^{t+1,j})$ corresponde a t y, por ende, $D_t^j(X^{t+1,j}, Y^{t+1,j})$ puede tomar valores por encima de 1; mientras que en (11) se tiene que $(X^{t,j}, Y^{t,j}) \in Z^t$ y, por tanto, se cumple que $D_t^j(X^{t,j}, Y^{t,j}) \leq 1$. En el caso de la función de distancia $D_t^{t+1}(X^t, Y^t)$ el problema se plantea como en (12) pero trasponiendo t y $t + 1$. Para descomponer el cambio en eficiencia técnica en eficiencia pura y de escala calculamos las funciones de distancia con VRS, incorporando a los problemas

anteriores la restricción $\sum_{j=1}^N \lambda^{t,j} = 1$.